



ویژه کنکور ۱۴۰۳

مثلاث

مهندس آریان حیدری

 Arianheidarii

 Arianheidarii

 Arianheidarioriginal





مقدماتی

(الف)  $57^\circ \approx 60^\circ$   
 واحدهای زاویه: رادیان و درجه:

❖  $\frac{\pi}{10} \rightarrow$

❖  $\frac{\pi}{12} \rightarrow$  یا  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} \right) =$

❖  $20^\circ \rightarrow$  یا  $\frac{1}{3} (60^\circ) =$

❖  $22/5^\circ = \frac{1}{2} (45^\circ) =$

تبدیل زوایا

(۱)  $\pi \rightarrow 180^\circ$   
 (۲) تبدیل به نسبتی از زوایای معروف

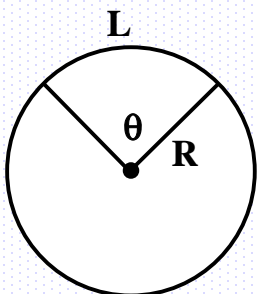
\* نسبت و تناسب دوری و اثبات این که چرا  $1 \text{ rad} \approx 60^\circ$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi \\ 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 360^\circ \\ ? \end{array} \right.$$

$$? = \frac{1 \times 360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3/14} \approx \frac{180}{3} = 60$$

تبدیل زوایا

رابطه بین زاویه، طول کمان (مسافت طی شده) و شعاع دایره



$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi \xrightarrow{\times R} 2\pi R \\ \theta \longrightarrow L \end{array} \right.$$

$\Rightarrow L = \theta \times R$

خطرا!



(قلم پی ۱۴۰۰)

۱. زاویه ۴۰ درجه بر حسب رادیان چند برابر زاویه  $\frac{\pi}{۳}$  رادیان است؟

$\frac{۳}{۲}$  (۴)

$\frac{۲}{۳}$  (۳)

$\frac{۲}{۲۷}$  (۲)

$\frac{۱}{۶}$  (۱)

زرتگ باش!

۲. مجموع اندازه‌های دو زاویه  $۴۰۰^\circ$  و تفاضل اندازه‌های آن‌ها  $\frac{۴\pi}{۹}$  رادیان است. اندازه زاویه بزرگ‌تر بر حسب رادیان

(موج آزمون الگو)

کدام است؟

$\frac{۱۱\pi}{۹}$  (۴)

$\frac{۸\pi}{۹}$  (۳)

$\frac{۴\pi}{۹}$  (۲)

$\frac{۴\pi}{۳}$  (۱)



۳. عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ تا ۳ چه زاویه‌ای را بر حسب رادیان طی می‌کند؟



$-\frac{\pi}{۳}$  (۴)

$-\frac{\pi}{۶}$  (۳)

$\frac{\pi}{۳}$  (۲)

$\frac{\pi}{۶}$  (۱)

خطرا!

(مهرماه)

۴. عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت عقربه‌دار در مدت  $\frac{۲}{۵}$  ساعت چند درجه دوران می‌کند؟



$۱۶۸^\circ$  (۴)

$۱۶۰^\circ$  (۳)

$۱۴۴^\circ$  (۲)

$۱۲۰^\circ$  (۱)

خطرا!



۵. چقدر طول می کشد که عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه  $2/5\pi$  رادیان دوران کند؟

- (۱) ۲/۵ ساعت
- (۲) ۱/۵ ساعت
- (۳) ۷۵ دقیقه
- (۴) ۱۰۵ دقیقه



$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi \rightarrow 60 \\ 2/5\pi \rightarrow ? \end{array} \right. \rightarrow \frac{2\pi}{2/5\pi} = \frac{60}{?} \Rightarrow ? = 75$$

(Red arrows indicate multiplication by 30:  $2\pi \times 30 = 60$  and  $? \times 30 = 60$ )

(معروماه)

۶. وقتی عقربه‌ی ساعت شمار به اندازه‌ی  $7\pi/15$  رادیان دوران می کند، چند دقیقه سپری شده است؟



- (۱) ۱۴۸
- (۲) ۱۶۸
- (۳) ۱۲۸
- (۴) ۱۵۸

**خطرا!**



۷. یک چرخ و فلک ۲۰ کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر

چرخ و فلک به اندازه  $48\pi/5$  رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین

(موج آزمون الگو)

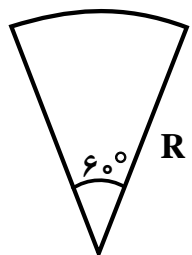
قرار می گیرد؟

- (۱) چهاردهم
- (۲) پانزدهم
- (۳) شانزدهم
- (۴) هفدهم

**خطرا!**

۸. مساحت شکل زیر چند است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) ۱۲



$$R = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow \pi R^2 \\ 60^\circ \rightarrow ? \end{array} \right. \div 6 \Rightarrow ? = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi \left(\frac{6}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{6} = 6$$



۹. در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه دقیقه‌شمار در مدت زمان ۴۰ دقیقه مسافت ۶۰ سانتی‌متر را طی کرده است.

(قلم‌پی ۱۴۰۰)

طول عقربه دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟



۴۵π (۴)

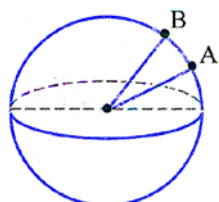
۴۵ / π (۳)

۱۵π (۲)

۱۵ / π (۱)

۱۰. دو شهر دارای طول جغرافیایی یکسان و عرض جغرافیایی ۱۰° و ۲۵° شمالی هستند. اگر شعاع زمین تقریباً ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، فاصله این دو شهر بر روی سطح زمین تقریباً چند کیلومتر است؟ (π = ۳ / ۱۴)

(کتاب درسی)



۵۵۸ (۱)

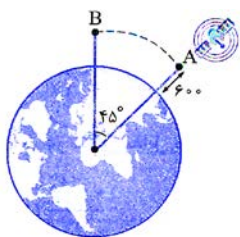
۸۳۸ (۲)

۱۶۷۵ (۳)

۲۵۱۴ (۴)

۱۱. مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصله ۶۰۰ کیلومتری از سطح کره زمین در حال حرکت است. اگر در هر ساعت ماهواره مسافت ۱۰π کیلومتر را طی کند، چه قدر طول می‌کشد از نقطه A به B برسد؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰km است.)

(کتاب درسی)



۱۶۰ (۱)

۱۵۰ (۲)

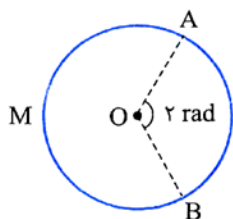
۱۷۰ (۳)

۱۷۵ (۴)

۱۲. با توجه به شکل زیر و با فرض π = ۳ / ۱۴، طول کمان AMB برابر ۱۲ / ۸۴ است. مساحت دایره کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

(نردیا ۳ فیلی سبز)

(مرکز دایره است.)



۴π (۱)

۶ / ۲۵π (۲)

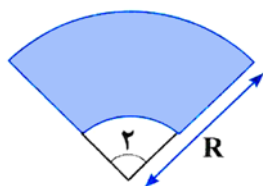
۹π (۳)

۱۲ / ۲۵π (۴)



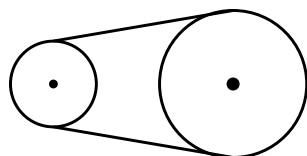


۱۳. در یک برف پاک کن با طول R، بخشی از طول برف پاک کن شامل تیغه است و محیط ناحیه‌ای که این برف پاک کن با دوران ۲ رادیان تمیز می‌کند ۸ می‌باشد. طول برف پاک کن کدام است؟ (IQ کج)



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

۱۴. در شکل مقابل یک تسمه، دو قرقره را به هم وصل کرده است. اگر شعاع قرقره‌ی بزرگ‌تر، ۳ برابر شعاع قرقره‌ی کوچک‌تر باشد، زمانی که قرقره‌ی کوچک‌تر  $108^\circ$  می‌چرخد، قرقره‌ی بزرگ‌تر چند رادیان می‌چرخد؟ (کتاب درسی)



- $\frac{\pi}{5}$  (۲)
- $\frac{\pi}{3}$  (۱)
- $\frac{\pi}{15}$  (۴)
- $\frac{\pi}{10}$  (۳)

۱۵. در یک تراکتور اگر چرخ کوچک با شعاع ۲۵ سانتی‌متر ۴ دور کامل بچرخد، چرخ بزرگ  $180^\circ$  دوران می‌کند. شعاع چرخ بزرگ چند متر است؟ (IQ کج)

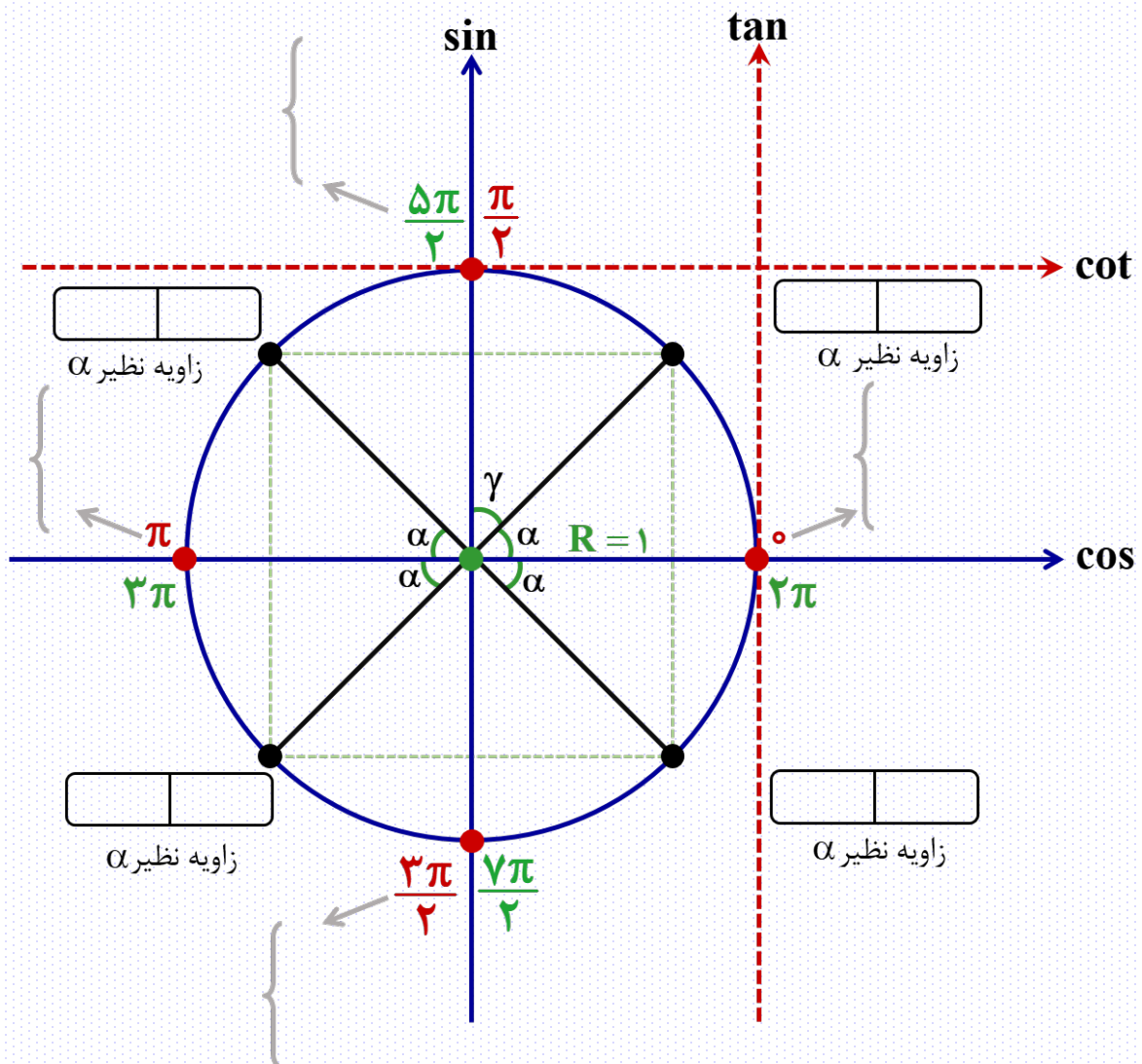
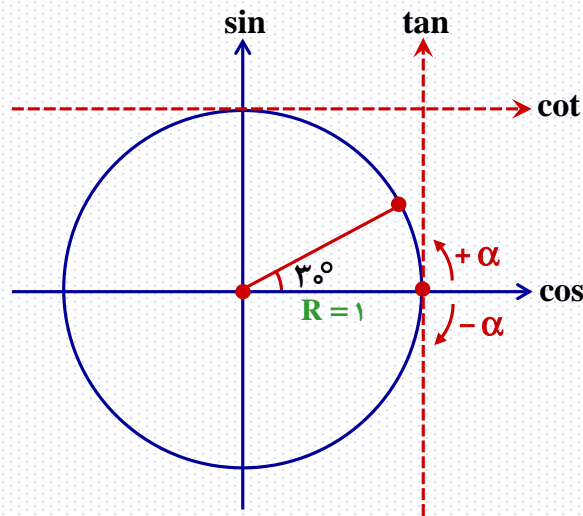


- ۲ (۴)
- ۱ (۳)
- ۰/۵ (۲)
- ۱/۵ (۱)



(ب)

دایره‌ی مثلثاتی:







\* مثال: مقایسه ربع ۱ و ۲؟

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = \\ \cos(-\alpha) = \\ \tan(-\alpha) = \\ \cot(-\alpha) = \end{cases}$$

\* مثال: مقایسه ربع ۱ و ۴؟ ←

نحوه برخورد توابع مثلثاتی با منفی!!

تعیین علامت حرفه‌ای مثلثاتی:

← cos

← cot, tan, sin

← sin

← cos

← cot, tan

(معروماه)



۱۶. اگر  $A = \frac{\tan 60^\circ - 2 \cos 30^\circ + \cot 45^\circ}{\cot^2 30^\circ - \frac{1}{2} \sin 30^\circ + \tan 45^\circ}$  باشد، آن‌گاه حاصل  $\frac{15}{2} A$  کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

۴ (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

۲ (۱)

۱۷. اگر  $\tan(\frac{2\alpha}{3} + \beta - 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  و  $\cot(\alpha + 2\beta) = 1$  باشد، حاصل عبارت  $\sin(\alpha - 15^\circ) + \sqrt{2} \tan(-2\beta)$  کدام است؟

(معروماه)



۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



۱۸. کدام نسبت از زاویه‌ی  $7$  - رادیان مثبت است؟

- (۱)  $\sin$
- (۲)  $\cos$
- (۳)  $\cot, \tan$
- (۴) همه

$$1 \text{ rad} = 60^\circ$$

$$-7 \text{ rad} = -7 \times 60^\circ = -420^\circ \xrightarrow{-360^\circ} -60^\circ$$

\*  $[\sin \alpha]$  ؟

براکت ؟ ← تعیین علامت

۱۹. اگر  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$  و  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$  باشد، آنگاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی واقع می‌شود؟

- (۱) چهارم
- (۲) سوم
- (۳) دوم
- (۴) اول

ناحیه ؟ ← تعیین علامت

۲۰. اگر  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} > \sqrt{1 + \sin 2x}$ ، آنگاه انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

نامعادله ؟ ← اول تعیین علامت

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+1} > \sqrt{1+1} \Rightarrow 1 > \sqrt{2} \times \Rightarrow \times 1$$

(IQ گج)

۲۱. اگر  $\cos x = \sin x - \sqrt{\cos x}$  باشد،  $x$  در کدام بازه می‌تواند باشد؟

- (۱)  $(60^\circ, 90^\circ)$
- (۲)  $(90^\circ, 270^\circ)$
- (۳)  $(240^\circ, 270^\circ)$
- (۴)  $(270^\circ, 300^\circ)$

معادله ؟ ← اول تعیین علامت



۲۲. به ازای چند مقدار صحیح  $a$ ، با فرض  $\cos x = 1 - a$  و  $\tan x = a^2 - 16$  انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است؟

(IQ گاج)

- (۱) صفر      (۲) ۲      (۳) ۴      (۴) ۷

**خطر!**

۲۳. اگر  $x = 283^\circ$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\cos x < \sin x$       (۲)  $\tan x < \sin x$       (۳)  $\tan^2 x < \sin^2 x$       (۴)  $\cos x < \tan x$

**نامساوی‌های مثلثاتی؟ ← اول تعیین علامت**

۲۴. کدام گزینه درست است؟

(IQ گاج)

- (۱)  $\sin 44^\circ > \cos 44^\circ$       (۲)  $\sin 91^\circ > \sin 89^\circ$       (۳)  $\cos 7^\circ = \cos 187^\circ$       (۴)  $\cos 4^\circ > \sin 4^\circ$

۲۵. در بازه‌ی  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$  کدام نامساوی نادرست است؟

- (۱)  $\sqrt{\sin x} > \sqrt{\cos x}$       (۲)  $\sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x}$   
 (۳)  $\frac{1}{2} < \sin x + \cos x < \sqrt{2}$       (۴)  $0 < \cos x - \sin x$



۲۶. حدود تغییرات توابع  $y = 5 - 2 \sin x$  و  $y = 5 - 2 \sin^2 2x$  و  $y = 5 - 2 \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$  را بیابید.

### ترفند تعیین min و max در توابع ساده مثلثاتی:

\* بُرد / حدود تغییرات / چی می تونه، چی نمی تونه!\*

\* با عنایت به دامنه !\*

$\sin$  فرد  $\circ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$   
 $\sin$  زوج  $\circ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$

$|\sin \circ| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$

(IQ کاج)

۲۷. بیشترین مقدار عبارت  $A = \frac{2}{5 - 3 \sin x}$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳)  $\frac{1}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{8}$

(موج آزمون الگو)

۲۸. مقدار عبارت  $A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$  با کدام یک از اعداد زیر نمی تواند برابر باشد؟

- (۱)  $\frac{9}{8}$
- (۲)  $-\frac{7}{8}$
- (۳)  $\frac{6}{7}$
- (۴) ۱



۲۹. فرض کنید برد تابع  $f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2(x)-1} - \sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$  به صورت  $[a, b]$  باشد. مقدار  $b - a$  کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

$$\frac{21}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{15}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} - \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}$$

$$R_f = [a, b] \Rightarrow b - a = ?$$

(۱) اگر دقت کنیم، توان‌ها قرینه همانند پس عبارتهای نمایی داده شده معکوس یکدیگرند. یعنی اگر یکی را  $t$

$$\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} = t \Rightarrow \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x} = \frac{1}{t} \quad \text{بگیریم، دیگری } \frac{1}{t} \text{ می‌شود:}$$

$$f(t) = t - \frac{1}{t} \quad \text{پس به جای این که برد تابع } f(x) \text{ را به دست آوریم. برد تابع } f(t) \text{ را محاسبه می‌کنیم:}$$

در این تست  $\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1}$  را  $t$  گرفته‌ایم. بلافاصله از روی تغییرات متغیر  $x$  باید محدوده تغییرات متغیر  $t$  را محاسبه کنیم و برد تابع  $f(t) = t - \frac{1}{t}$  را برحسب دامنه متغیر  $t$  محاسبه کنیم:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9$$

$$\Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2$$

بنابراین به جای محاسبه برد تابع  $f(x)$ ، برد تابع  $f(t)$  را در محدوده  $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$  حساب می‌کنیم:

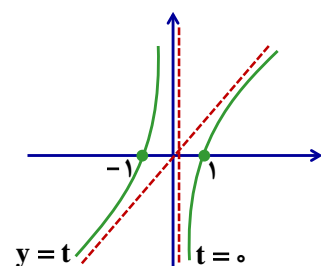
(۲) نمودار تابع  $f(t) = t - \frac{1}{t}$  دارای مجانب قائم  $t = 0$  (ریشه مخرج)

و مجانب مایل  $y = t$  (در بی‌نهایت  $\frac{1}{t}$  هم‌ارز صفر می‌شود و  $f(t)$  هم‌ارز  $t$  می‌شود) است.

همچنین تابع  $f(t) = t - \frac{1}{t}$  یا همان  $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t}$  محور  $t$ ها را در دو نقطه  $t = \pm 1$  قطع

می‌کند (در ضمن تابع  $f(t)$  فرد است و نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد).

و نمودار آن به صورت روبه‌رو است:



(۳) همانطور که مشاهده می‌شود تابع  $f(t)$  در بازه محدود  $[\frac{1}{2}, 4]$  اکیداً صعودی است. پس:

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 4 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t) \leq f(4) \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(t) \leq \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right] \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$



(ریاضی قارچ ۱۴۰۰)

۳۰. فرض کنید  $[a, b]$  برد تابع  $f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$  باشد. مقدار  $a + b$ ، کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

**خطرا!**

پاسخ: گزینه ۴

(۱)

$$f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$$

تو این تست به جای  $-\sqrt{5\sin^2(x)-1}$  متغیر  $t$  می‌گذاریم. حالا باید اول حدود تغییرات  $t$  رو به دست بیاریم:

$$\sin^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 5\sin^2 x \leq 5$$

$$-1 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 2$$

$$-2 \leq -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 0$$

(۲) حالا کافیه برد تابع  $y = 2^t$  رو با دامنه  $t \in [-2, 0]$  به دست بیاریم:

$$-2 \leq t \leq 0 \xrightarrow{\text{تابع } 2^t \text{ صعودیه}} 2^{-2} \leq 2^t \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1$$

پس برد تابع بازه  $[\frac{1}{4}, 1]$  است یعنی  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = 1$  پس:

$$a + b = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

(IQ گاج)

۳۱. بیشترین مقدار  $A = 5\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2$  کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



۲۲. کمترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = 3\sin^2 2x + \sin 2x - 2$  چقدر از بیشترین مقدار آن، کمتر است؟ (مهرماه)

$$\frac{44}{12} \quad (4)$$

$$\frac{49}{12} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{23}{12} \quad (1)$$

ترفند تعیین min و max در توابع درجه دو مثلثاتی:



۲۳. برد تابع با ضابطه  $y = 2\cos^2 3x - 3\sin 3x$  بازه  $[a, b]$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

$$\frac{49}{8} \quad (4)$$

$$\frac{9}{2} \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$





۳۴. حدود تغییرات تابع  $y = \sin x$  وقتی  $30^\circ \leq x \leq 120^\circ$  است، را بیابید.

روش ۱:

روش ۲:

\*  $\frac{1}{1 + \sin x}$  ؟ (نزد بام فیلی سبز)

۳۵. اگر  $120^\circ \leq x \leq 225^\circ$  ، کدام گزینه نشان دهنده محدوده  $\cos x$  است؟



(۴)  $[-1, \frac{-1}{2}]$

(۳)  $[\frac{-1}{2}, 0]$

(۲)  $[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}]$

(۱)  $[-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}]$

(سنجش ۱۴۰۱)

۳۶. بیشترین مقدار عبارت  $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  کدام است؟

(۴)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳)  $1 + \sqrt{2}$

(۲) ۲

(۱) صفر

\* کمترین مقدار؟





(موج آزمون الگو)

۳۷. اگر  $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$  و  $\tan \alpha = m^2 + m^2$ ، حدود  $m$  کدام است؟

(۴)  $m \leq -1$

(۳)  $m \geq -1$

(۲)  $m \leq 0$

(۱)  $m \geq 0$

گاج ۱۴۰۰

۳۸. اگر  $\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{3}$  و  $\sin 2x = \frac{1-2m}{3}$ ، میانگین کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار  $m$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{5}{8}$

(۳)  $\frac{5}{8}$

(۲)  $\frac{3\sqrt{3}+1}{8}$

(۱)  $\frac{1-3\sqrt{3}}{8}$

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۳۹. اگر  $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$  و  $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$  باشد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

(۴)  $(-1, 1]$

(۳)  $(-1, 1)$

(۲)  $(-1, 5]$

(۱)  $(-1, 5)$



روش ۱:

روش ۲:

(تجربی ۱۴۰۱)

۴۰. اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  و  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$  باشد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

(۴)  $(-1, 2)$

(۳)  $(-1, 2]$

(۲)  $(-2, 1]$

(۱)  $(-2, 1)$

روش ۱:

روش ۲:



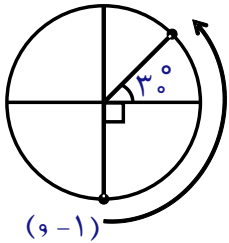
۴۱. نقطه‌ی  $(-1, 0)$  را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی  $120^\circ$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم، مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right) \quad (۴)$$

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (۳)$$

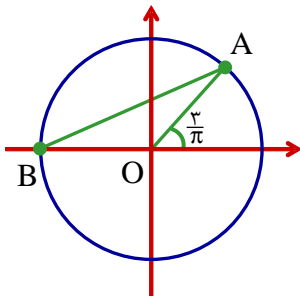
$$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right) \quad (۲)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (۱)$$



۴۲. اگر A نقطه‌ی متناظر با زاویه‌ی  $\frac{\pi}{3}$  روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، نسبت طول کمان AB به طول پاره‌خط AB کدام است؟

(قلم‌چی ۹۹)



$$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \quad (۲)$$

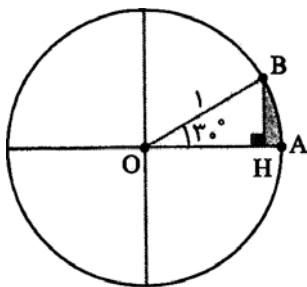
$$\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \quad (۳)$$

(مهورماه)

۴۳. در شکل روبه‌رو، محیط قسمت سایه‌زده کدام است؟



$$\frac{12 - 3\sqrt{3} + \pi}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{3 - \sqrt{3} + \pi}{6} \quad (۱)$$

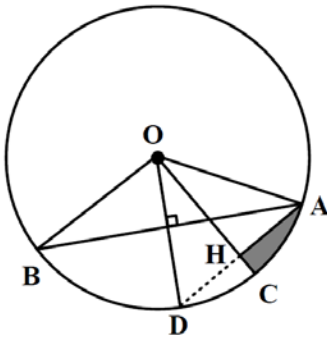
$$\frac{9 - 3\sqrt{3} + \pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{6\sqrt{3} + \pi}{6} \quad (۳)$$



۴۴. مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت  $\pi$ ،  $\widehat{AOB} = 120^\circ$  و  $OH$  عمود منصف  $AD$  است. اختلاف محیط مثلث  $AOH$  و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟

(تیربی ۱۴۰۲)



$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

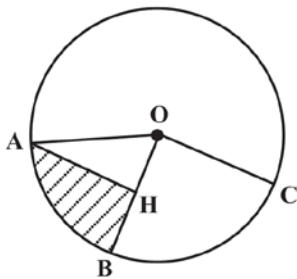
$$\sqrt{2} - \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\pi - \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\pi - \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۵. مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به محیط  $2\pi$  و  $AH$  عمود منصف  $OB$  است. محیط قسمت هاشور خورده چقدر از محیط مثلث  $OAH$  بزرگ تر است؟

(تیربی فارح ۱۴۰۲)



$$\frac{2\pi - 1}{3} \quad (1)$$

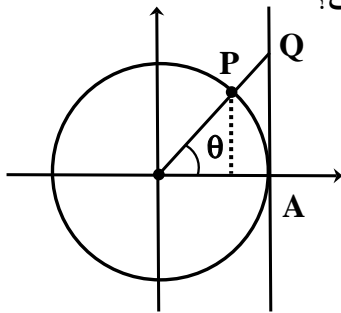
$$\frac{2\pi - 3}{6} \quad (2)$$

$$\frac{\pi - 1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{\pi - 3}{3} \quad (4)$$



۴۶. در دایره‌ی مثلثاتی روبه‌رو، اگر مختصات  $p$  به صورت  $(\sin a, 1 - a)$  باشد، کدام کدام  $AQ$  است؟



$$\frac{5}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{13}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{5} \quad (۳)$$

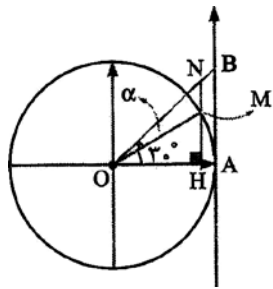
1

$$\tan \alpha = AQ$$

2

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sin}{\cos}$$

۴۷. در دایره‌ی مثلثاتی شکل روبه‌رو اگر طول  $MN$  نصف طول  $MH$  باشد، مقدار  $\tan(\alpha + 30^\circ)$  کدام است؟ (مهر و ماه)



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

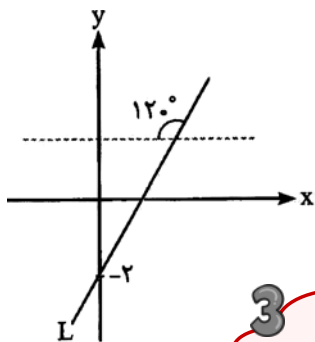
$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۳)$$

(کتاب درسی)

۴۸. با توجه به شکل روبه‌رو، معادله خط  $L$  کدام است؟



$$y - 2 = \sqrt{3}x \quad (۲)$$

$$y + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (۱)$$

$$y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (۴)$$

$$y + 2 = \sqrt{3}x \quad (۳)$$

3

$$\tan \alpha = \text{شیب خط}$$

↓  
زاویه با جهت + محور x ها

۴۹. خط  $l$  با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $120^\circ$  می‌سازد و بر خط گذرنده از مبدأ  $d$  عمود است. قرینه خط  $d$  نسبت به خط  $y = x$  کدام است؟ (IQ گج)

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad (۴)$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x \quad (۳)$$

$$y = \sqrt{3}x \quad (۲)$$

$$y = -\sqrt{3}x \quad (۱)$$



۵۰. اگر خط  $y = x - 1$  را حول محل تقاطع آن با محور  $y$  ها، به اندازه  $15^\circ$  در خلاف جهت مثبت مثلثاتی دوران دهیم، معادله‌ی خط حاصل کدام خواهد بود؟ (IQ کج)

$\sqrt{3}y = 3x + 3$  (۴)    
  $\sqrt{3}y = 3x - 3$  (۳)    
  $3y = \sqrt{3}x - 3$  (۲)    
  $3y = \sqrt{3}x + 3$  (۱)

۵۱. خط به معادله‌ی  $(\sqrt{3} + \sqrt{6})x - (3 + 3\sqrt{2})y = 6$ ، جهت مثبت محور عرض‌ها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟ (مهر و ماه)

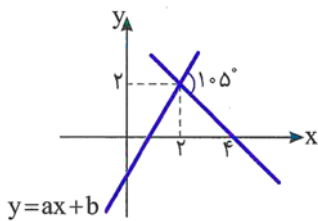


$\frac{\pi}{3}$  درجه (۴)    
  $60^\circ$  رادیان (۳)    
 $\frac{\pi}{3}$  رادیان (۲)    
  $30^\circ$  درجه (۱)

۵۲. خط  $2mx + (m^2 - 1)y = 3$ ، به ازای دو مقدار  $m$  با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $60^\circ$  درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر  $m$  کدام است؟ (تیربی دی ۱۴۰۱)

$\frac{4}{\sqrt{3}}$  (۴)    
 $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (۳)    
 $4\sqrt{3}$  (۲)    
 $2\sqrt{3}$  (۱)

۵۳. دو خط شکل مقابل از نقطه  $(2, 2)$  عبور می‌کنند. مقدار  $a + b$  کدام است؟ (موج آزمون الگو)

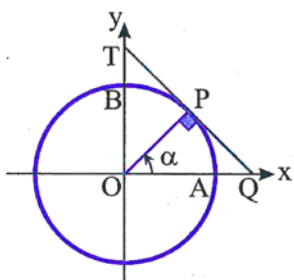


$2 - 2\sqrt{3}$  (۱)    
 $2 - \sqrt{3}$  (۲)    
 $1 - \sqrt{3}$  (۳)    
 $2 - 3\sqrt{3}$  (۴)



(موج آزمون الگو)

۵۴. در دایره مثلثاتی مقابل زاویه‌ای حاده است. طول پاره خط BT کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{\cos \alpha}$

(۲)  $\frac{1}{\sin \alpha}$

(۳)  $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$

(۴)  $\frac{1}{\sin \alpha} - 1$

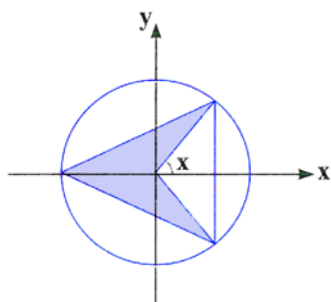
\* PQ؟

یادآوری زوایای ۳۰° و ۶۰° در مثلث قائم الزویه:



(IQ گج)

۵۵. با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



(۱)  $\sin x \cos x$

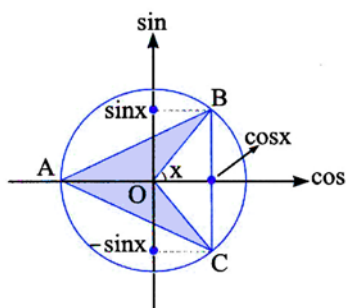
(۲)  $\sin x + \cos x$

(۳)  $\sin x$

(۴)  $\cos x$

پاسخ: گزینه ۳

مساحت ناحیه رنگی برابر با تفاضل مساحت‌های دو مثلث ABC و OBC است. کسی هست که نداند، تصویر هر نقطه روی دایره مثلثاتی بر محور x ها، cos زاویه نظیر و تصویر هر نقطه روی دایره بر محور y ها، sin زاویه نظیر را نشان می‌دهد؟



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times (\cos x + 1) \times \sin x = \sin x (1 + \cos x) = \sin x + \sin x \cos x$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \times (\cos x) \times \sin x = \sin x \cos x$$

در نتیجه مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S_{\Delta ABC} - S_{\Delta OBC} = (\sin x + \sin x \cos x) - \sin x \cos x = \sin x$$



(ج)

۱) اندازه:

مضارب زوج  $\pi$  ... $\leftarrow \pi$  جنس رو عوض ... $\leftarrow \frac{\pi}{2}$  جنس رو عوض ...نسبت‌های مثلثاتی مرتبط با مضارب  $\pi$  و  $\frac{\pi}{2}$ 

۲) علامت: با توجه به ربع قرارگیری، تعیین علامت کن.

۱)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

خطر!

۵)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$

خطر!

۲)  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

۶)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

۳)  $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

۷)  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha$

۴)  $\cot(4\pi - \alpha) = \cot \alpha$

۸)  $\cot\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

خطر!

مثال کاربردی:

۱)  $\sin(15^\circ) =$

۳)  $\tan\left(\frac{180+45}{225}\right) = \tan 45^\circ = 1$

۲)  $\cos(15^\circ) = -\sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴)  $\cot(33^\circ) =$





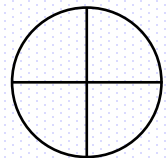
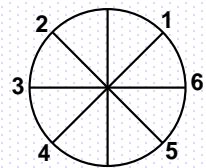
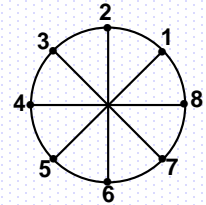
## مثال کاربردی ۲:

$$۱) \sin \frac{7\pi}{6} =$$

$$۲) \cos \left( \frac{-43\pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{43\pi}{4} \right) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$۳) \tan \left( \frac{-26\pi}{3} \right) = -\tan \left( \frac{26\pi}{3} \right) \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow$$

$$۴) \cot \left( -\frac{76\pi}{6} \right) =$$



خطر!

روش ویژه آریان حیدری برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی مضارب صحیح زوایای معروف رادیانی:

اندازه ← ضریب روئنگر!

علامت ← ضریب روبنگر! و با توجه به ربع قرارگیری، تعیین علامت کن.

(IQ کج)



$$\sin(\pi - x) + \sin(-x) = 0 \quad (۲)$$

$$\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0 \quad (۴)$$

۵۶. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x) = 0 \quad (۱)$$

$$\cos(3\pi + x) - \cos x = 0 \quad (۳)$$





۵۷. در تساوی  $\sin(x + \frac{3\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$  دو جواب برای  $x$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$  به دست می‌آید. مجموع این دو جواب

(قلم‌پی ۹۸)

کدام است؟



؟

$\frac{7\pi}{32}$  (۴)

$\frac{5\pi}{32}$  (۳)

$\frac{3\pi}{32}$  (۲)

$\frac{\pi}{16}$  (۱)

(نردبام فیلی سبز)

۵۸. به ازای کدام مقدار  $x$ ، تساوی  $\tan(x + \frac{\pi}{12}) = \cot(2x - \frac{\pi}{8})$  برقرار است؟



$\frac{13\pi}{72}$  (۴)

$\frac{13\pi}{48}$  (۳)

$\frac{11\pi}{72}$  (۲)

$\frac{11\pi}{48}$  (۱)

(موروماه)

۵۹. کدام گزینه با  $\cos 35^\circ$  برابر نیست؟



$\sin 215^\circ$  (۴)

$-\sin(-55^\circ)$  (۳)

$-\sin 305^\circ$  (۲)

$-\cos 145^\circ$  (۱)

۶۰. حاصل عبارت  $\tan(300)\cos(210) + \tan(480)\sin(840)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب

(تجربی ۹۹)

درجه هستند.)

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

$-\frac{1}{2}$  (۱)



۶۱. حاصل عبارت  $\tan(285)\tan(-165) - \sin(1095)\cos(255)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

(تجربی فارغ ۹۹)



$\sin^2(15)$  (۱)       $\cos^2(15)$  (۲)       $-\sin^2(15)$  (۳)       $-\cos^2(15)$  (۴)

(ریاضی ۹۸)

۶۲. حاصل عبارت  $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$  کدام است؟

$-\frac{3}{2}$  (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{3}{2}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan\left(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin\left(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos\left(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$



(تجربی ۹۸)

۶۳. حاصل عبارت  $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$  کدام است؟



$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{1}{4}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$$

cos منفی خوار و sin منفی را از خود عبور می‌دهد

$$\rightarrow \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

مضارب زوج  $\pi$  قابل حذفند

$$\rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ریاضی فارغ ۹۸)

۶۴. حاصل عبارت  $\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3}$  کدام است؟



$\sqrt{3}$  (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)



فرمول‌های مثلثاتی

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱$$

$$۲) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = ۱ \pm ۲ \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۳) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱ - ۲ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$۴) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = ۱ - ۲ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$۵) \tan \alpha \cot \alpha = ۱$$

$$۶) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{۱}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$۷) ۱ + \tan^2 \alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^2 \alpha}$$

$$۸) ۱ + \cot^2 \alpha = \frac{۱}{\sin^2 \alpha}$$

$$۹) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۱۰) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۱۱) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۱۲) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



$$۱۳) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\xi}\right) = \sqrt{\xi} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{\xi}\right) = \frac{\sqrt{\xi}}{\xi} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$۱۴) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{\xi}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{\xi}\right) = \frac{\sqrt{\xi}}{\xi} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$۱۵) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۱۶) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۱۷) \tan\left(\frac{\pi}{\xi} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$۱۸) \tan\left(\frac{\pi}{\xi} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$۱۹) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$۲۰) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$۲۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$۲۲) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$۲۳) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$



$$۲۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$۲۵) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$۲۶) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$۲۷) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$۲۸) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$۲۹) \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$۳۰) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$۳۱) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳۲) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳۳) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$۳۴) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$۳۵) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

\* فرمول‌های ۹ الی ۱۸ و ۳۳ الی ۳۵ ویژه‌ی رشته ریاضی هستند.



### مثلات ویژه به سبک آریان حیدری

۱:  $\odot$  **یه فریبزی، بی زاویه**

**مثال:** ساده‌ی شده‌ی عبارت  $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  کدام است؟

۲:  $\odot$  **یه فریبزی، با زاویه**

**مثال:** اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  کدام است؟

۳:  $\odot$  **دو فریبزی، تابلو**

**مثال:** اگر  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$  کدام است؟

۴:  $\odot$  **دو فریبزی، ناتابلو**

**مثال:** اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟



۱: **یه فریبزی، بی زاویه**

(تجربی ۸۲)

۶۵. خلاصه شده عبارت  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳)  $\cos 2\alpha$

(۲)  $\sin 2\alpha$

(۱)  $-\sin 2\alpha$

(ریاضی فارغ ۹۱)

۶۶. ساده شده کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{16}{\sin^4 2\theta}$

(۳)  $\frac{16}{\cos^4 2\theta}$

(۲)  $\frac{8}{\sin^2 2\theta}$

(۱)  $\frac{8}{\cos^2 2\theta}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta \underbrace{(1 - \cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2} \sin 2\theta)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = \frac{16}{\sin^4 2\theta} \end{aligned}$$





(ریاضی فارغ ۱۴۰۰)

۶۷. ساده‌ی شده‌ی عبارت  $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ، کدام است؟

$$2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۴)$$

$$2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۳)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۲)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2 \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow 1 - \cos\theta = 2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 2 \cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow 1 + \cos\theta = 2 \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$A = \frac{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}}{2 \sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2\frac{\theta}{2}}{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow A = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 2 \cot\frac{\theta}{2}$$

(نردبام فیلی سبز)

۶۸. اگر  $A = \tan x - \frac{1}{\cos x}$  و  $B = \tan x + \frac{1}{\cos x}$ ، آن‌گاه حاصل  $A.B$  کدام است؟

$$\cos^2 x \quad (۴)$$

$$\sin^2 x \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$



پاسخ: گزینه ۲

$$AB = \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) = \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

با توجه به این که  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ، بنابراین:

$$AB = \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) = \tan^2 x - 1 - \tan^2 x \Rightarrow AB = -1$$



۶۹. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$  کدام است؟

(۴)  $\cot \alpha$

(۳)  $\tan \alpha$

(۲)  $-\cot \alpha$

(۱)  $-\tan \alpha$

خطرا!

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} - \left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \begin{cases} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\sin \alpha} - (-\tan \frac{\alpha}{2}) = \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{-(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

۷۰. اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟ (تقریبی ۹۸)

(۴)  $-\cos x$

(۳)  $-\sin x$

(۲)  $\cos x$

(۱)  $\sin x$

پاسخ: گزینه ۴

$x$  در ربع سوم قرار دارد، پس:

$$\cos x < 0$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x}$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\frac{1}{-\cos x} \cdot \cos^2 x = -\cos x$$

حاصل عبارت به صورت مقابل است:



(تقریبی قارچ ۹۱)

۷۱. اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\cos^2 x$       (۲)  $-\cos x$       (۳)  $\cos^2 x$       (۴)  $\cos x$



پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right) &= \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \cdot \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} \stackrel{\frac{\pi}{2} < x < \pi}{=} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\ &= -\sin x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x \end{aligned}$$

(رشته ریاضی) (سنجش ۸۷)

۷۲. اگر  $A - B = \frac{\pi}{6}$  باشد، حاصل  $\frac{2\sin(A+B) - 1}{2\cos A \cos B}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan B$       (۲)  $\tan A$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \frac{2\sin(A+B) - 1}{2\cos A \cos B} &= \frac{2(\sin(A+B) - \frac{1}{2})}{2\cos A \cos B} \stackrel{\sin(A-B) = \frac{1}{2}}{=} \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2\cos A \cos B} \\ &= \frac{2\sin B \cos A}{2\cos A \cos B} = \tan B \end{aligned}$$

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A - (\sin A \cos B - \sin B \cos A)$



۷۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس  $\hat{A}$  قائم است، حاصل  $\frac{1}{\tan^2 \hat{C} + 1} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right)$  کدام است؟ (IQ کج)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

در مثلث ABC زاویه  $\hat{A} = 90^\circ$  است، پس داریم:

پس دو زاویه B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که  $\frac{1}{1 + \tan^2 \square} = \cos^2 \square$  و  $\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \square\right) = \cos^2 \square$

است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) = \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویه B و C متمم‌اند، می‌توان گفت  $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$  و همچنین  $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$  است. پس با استفاده از رابطه  $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$  می‌توان نوشت:

۷۴. اندازه زاویه A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه B است، حاصل  $2 \cos A \sin B - \sin C$  کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\hat{A} = 45 + \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin(180 - (\hat{A} + \hat{B}))$$

$$= 2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin(\hat{A} + \hat{B})$$

$$= 2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - (\sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B})$$

$$= 2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \cos \hat{B} - \cos \hat{A} \sin \hat{B}$$

$$= \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \cos \hat{B} = \sin(\hat{B} - \hat{A}) = \sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۵. اندازه زاویه B در مثلث ABC، ۲ برابر اندازه A است. حاصل  $2 \sin A \cos B - \sin C$  با کدام مورد برابر است؟

(ریاضی میرد ۱۴۰۱)



- (۱)  $-\sin A$  (۲)  $-\sin B$  (۳)  $\sin B$  (۴)  $\sin A$



(قلم پی ۹۴)

۷۶. به ازای کدام A تساوی  $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \tan^4 x - 1$  یک اتحاد است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \tan^4 x - 1 \Rightarrow \frac{1 + A \cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + A \cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x} \Rightarrow 1 + A \cos^2 x = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}$$

$$1 + A \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^2 x} - \cos^2 x \Rightarrow 1 + A \cos^2 x = \frac{1}{1 - \cos^2 x} - \cos^2 x \Rightarrow A = -2$$

۷۷. اگر  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha)} - \frac{1}{\cos 2\alpha} = (m + 2) \tan 2\alpha$  باشد، m کدام است؟  $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z})$  (IQ گج)

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۱

تنها تابع مثلثاتی منفی خوار کسینوس است، پس  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  و  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  و داریم:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \frac{1}{\cos 2\alpha} = (m + 2) \tan 2\alpha$$

برای ساده کردن کسر اولی یعنی  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ ، صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج، یعنی  $\sin \alpha + \cos \alpha$  ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\left( \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \times \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right) - \frac{1}{\cos 2\alpha} = (m + 2) \tan 2\alpha \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow (m + 2) \tan 2\alpha$$

حالا به کمک فرمول‌های  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  و  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  می‌توان نوشت:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = (m + 2) \tan 2\alpha$$

از طرفی  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$  است و در نهایت:

$$\tan 2\alpha = (m + 2) \tan 2\alpha \Rightarrow m + 2 = 1 \Rightarrow m = -1$$



(مهورماه و IQ کج)

۷۸. از دستگاه  $\begin{cases} \tan^3 x + \cot^3 x = a \\ \tan x + \cot x = b \end{cases}$  کدام نتیجه گیری درست است؟

$b^3 = 3b - a$  (۴)       $b^3 = 3a - b$  (۳)       $b^3 = 3b + a$  (۲)       $b^3 = 3a + b$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ظاهر سوال اتحاد  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$  را به یادمان می آورد. با فرض  $A = \tan x$  و  $B = \cot x$  داریم:

$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) \Rightarrow a = b(\tan^2 x + \cot^2 x - 1) = ?$   
طبق فرض برابر  $b$       طبق فرض برابر  $a$

حالا دوباره باید تلاش کنیم عبارت  $\tan^2 x + \cot^2 x$  را نیز به کمک اتحاد  $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$  بر حسب  $b$  بنویسیم:

$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cdot \cot x$

$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = b^2 - 2$

حال ادامه ی کار از جایی که رها کرده بودیم، با قرار دادن  $(b^2 - 2)$  به جای عبارت  $(\tan^2 x + \cot^2 x)$  از سر می گیریم:

$a = b((b^2 - 2) - 1) = b(b^2 - 3) \Rightarrow a = b^3 - 3b$  یا  $b^3 = 3b + a$

(مهورماه)

۷۹. اگر بدانیم  $\tan \alpha = \frac{a+3}{4}$  و  $\cot \alpha = \frac{2b}{a-2}$ ، آن گاه کدام رابطه بین  $a$  و  $b$  برقرار است؟



$a = \frac{2-b}{3b+4}$  (۴)       $a = \frac{b-2}{3b+4}$  (۳)       $a = \frac{3b+4}{2-b}$  (۲)       $a = \frac{3b+4}{b-2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تعاریف  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  و  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  و در نظر گرفتن دامنه ی تعریف آن ها، می توان نوشت:

$\tan \alpha \times \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \xrightarrow{(\sin \alpha, \cos \alpha \neq 0)} \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

اکنون اگر به جای  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$ ، معادل آن ها بر حسب  $a$  و  $b$  را (براساس فرض مسئله) در رابطه ی بسیار مهم اخیر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$\frac{a+3}{4} \times \frac{2b}{a-2} = 1 \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \frac{2ab+6b}{4a-8} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 2ab+6b = 4a-8 \Rightarrow 2ab-4a = -6b-8$

$\xrightarrow{\text{a رو پیدا کن}} a(2b-4) = -6b-8 \Rightarrow a = \frac{-6b-8}{2b-4} \Rightarrow a = \frac{-2(3b+4)}{-2(-b+2)} = \frac{3b+4}{-b+2} = \frac{3b+4}{2-b}$



## ۲: یه فریبرزی، با زاویه

- ۱- زوایای زیبا
- ۲- ارتباط زیبا بین ... (مکمل و متمم)
- ۳- ارتباط زیبا بین ... (فرمولها)
- ۴-

قانون ویژه آریائف! (لَعْنَتَ بر مُفْسِدِین!)

$\sin \theta$ $\downarrow$ $0 \leq \leq 90$	$0 < \theta < 60$
	$60 < \theta < 70$
	$70 \leq \theta < 80$
	$80 \leq \theta < 90$

+ بندی:  
ربع ۱، sin، رندا!

۱)  $\sin 85^\circ =$

۲)  $\sin 72^\circ =$

توان ۲  
توان ۳ →

۳)  $\sin 63^\circ =$

۴)  $\sin 35^\circ =$

۵)  $\sin 20^\circ =$

۶)  $\sin 15^\circ =$

۷)  $\sin 22/5^\circ =$

۸)  $\sin 11^\circ \approx$

۹)  $\sin 13^\circ \approx$

۱۰)  $\sin 130^\circ =$

۱۱)  $\cos 50^\circ =$

۴)  $30^\circ \xrightarrow{+5^\circ} 35^\circ$   
 $\frac{+0.8}{+0.8}$

۵)  $30^\circ \xrightarrow{-2 \times 5^\circ} 20^\circ$   
 $\frac{-2 \times 0.8}{-2 \times 0.8} = -0.16$

۶)  $0^\circ \xrightarrow{+3 \times 5^\circ} 15^\circ$   
 $\frac{+3 \times 0.8}{+3 \times 0.8} = +0.24$

۷)  $30^\circ \xrightarrow{-5^\circ - 2/5^\circ} 22/5^\circ$   
 $\frac{-0.8 - 0.4}{-0.8 - 0.4} = -0.12$

۱۲)  $\cos 25^\circ =$

۱۳)  $\cos 115^\circ =$

۱۴)  $\tan 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{0.35}{0.95} = \frac{35}{95} = \frac{7}{19} \approx \frac{1}{3}$

تمرین:

۱)  $\sin 55^\circ =$

۲)  $\cos 95^\circ =$

۳)  $\tan 190^\circ =$

۴)  $\cot 326^\circ =$





\* به تست‌های ۱۶ و ۶۰ الی ۶۴ مراجعه کنید.

۸۰. حاصل  $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۰ (۲) صفر
- ۱/۲ (۳)
- ۱ (۴)

\* آخرش  $\cos \pi + ?$

۸۱. مقدار عبارت  $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$  کدام است؟

(موج آزمون الگو)



- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۳/۲ (۳)
- ۳/۲ (۴)

۸۲. حاصل عبارت  $A = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \dots \times \tan 8^\circ$  برابر کدام گزینه می‌شود؟

- ۱ (۱)
- $\tan 5^\circ$  (۲)
- ۴ (۳)
- ۱ (۴)

۸۳. حاصل عبارت  $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ}{\tan 731^\circ \times \cot 11^\circ}$  کدام است؟

(موج آزمون الگو)



- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)





(IQ کاج)

۸۴. حاصل  $\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{14}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{18}\right)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

(نردیا ۴ شیلی سبز)



۸۵. حاصل  $\frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x \cos x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{5}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴)  $\frac{1}{2}$

۸۶. حاصل عبارت  $A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 179^\circ + \sin^2 180^\circ$  برابر کدام گزینه است؟ (معمروماه)

- (۱) ۹۰ (۲) ۸۹ (۳) ۹۰/۵ (۴) ۸۹/۵



(نردباز ۴ قبلی سبز)

۸۷. حاصل  $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$  (۱)
- $-\frac{1}{4}$  (۲)
- $\frac{1}{4}$  (۳)
- $\frac{1}{2}$  (۴)

بی تابی!

(IQ گاج)

۸۸. مقدار عددی عبارت  $A = (1 + \cos \frac{\pi}{12})(1 + \cos \frac{11\pi}{12})(1 + \cos \frac{5\pi}{12})(1 + \cos \frac{7\pi}{12})$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)
- $\frac{1}{4}$  (۲)
- $\frac{1}{8}$  (۳)
- $\frac{1}{16}$  (۴)

بی تابی!

(مهوروماه)

۸۹. حاصل عبارت  $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{8})(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{3\pi}{8})$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)
- $\frac{1}{2}$  (۳)
- $\frac{1}{4}$  (۴)

بی تابی!



معروف

۹۰. حاصل  $(\cos \frac{\pi}{\lambda} - \sin \frac{\pi}{\lambda})^2 - (\sin \frac{\pi}{\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda})^2$  کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt{2}$  (۲) $-\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\left( \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}}_1 - \underbrace{2 \sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}}_{\sin \frac{\pi}{\lambda}} \right) - \left( \underbrace{\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}}_1 + \underbrace{2 \sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}}_{\sin \frac{\pi}{\lambda}} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{\lambda} = -2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

(IQ کج)



۹۱. ساده شده عبارت  $\frac{(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda})^2}{(\sin \frac{\pi}{\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda})^2}$  به صورت  $a + b\sqrt{2}$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

۹۲. حاصل  $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$  به ازای  $x = \frac{7\pi}{12}$  کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

 $-\frac{1}{2}$  (۲) $\frac{1}{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1 = \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^1 + \overbrace{2 \sin x \cos x}^{\sin 2x} - 1 = \sin 2x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{12}} \sin \frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$



(معمروماه)

۹۳. حاصل عبارت  $p = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$  به ازای  $\alpha = 5/625^\circ$  کدام است؟

$\frac{1}{8}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{16}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۱)

(نردبام فیلی سبز)

۹۴. حاصل  $(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{1}{2}$  (۱)

(نردبام فیلی سبز)

۹۵. حاصل  $\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$  به ازای  $x = 7/5^\circ$  برابر کدام گزینه است؟

$\frac{3}{16}$  (۴)

$\frac{3}{8}$  (۳)

$\frac{1}{8}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

(IQ گاج)

۹۶. حاصل  $\cos \alpha \sin^5 \alpha - \sin \alpha \cos^5 \alpha$  به ازای  $\alpha = 15^\circ$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{8}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{8}$  (۳)

$-\frac{1}{8}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۱)



۹۷. حاصل  $\frac{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ}{2 \sin 70^\circ}$  کدام است؟

(IQ کج)

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱/۲ (۳)
- ۱/۲ (۴)

\* به تست های ۸۷ و ۸۸ مراجعه کنید.

۹۸. حاصل  $\sin^2(\frac{\pi}{8})$  کدام است؟

(معمومه)

- ۲ + √۲ / ۲ (۱)
- ۲ - √۲ / ۲ (۲)
- ۲ + √۲ / ۴ (۳)
- ۲ - √۲ / ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به فرمول های  $\cos 2x$ ، می توانیم بنویسیم:  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$   $\xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{8}}$   $\cos \frac{2\pi}{8} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \div 2 \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

\* به تست ۸۹ مراجعه کنید.

۹۹. حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

(ریاضی ۹۶)

- ۲ (۱)
- √۶ (۲)
- ۲√۲ (۳)
- ۲√۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مخرج مشترک می گیریم و با استفاده از فرمول  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  می توان نوشت:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{4}} = 4(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

حالا چگونه  $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$  را پیدا کنیم؟ کمی ابتکاری است. نام آن را A می گذاریم، سپس طرفین تساوی را

$$A = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \Rightarrow A^2 = \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نهایت خواسته مسئله، یعنی  $4(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$  برابر  $2\sqrt{2}$  می باشد.



(IQ کج)

۱۰۰. حاصل عبارت  $A = \sin 10^\circ \times \sin 50^\circ \times \sin 70^\circ$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۴)
- $\frac{1}{16}$  (۳)
- $\frac{1}{8}$  (۲)
- $\frac{1}{4}$  (۱)

**پاسخ:** گزینه ۲

برای سادگی در حل تست، به کمک زوایای متمم می‌توان نوشت:

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ, \quad \sin 50^\circ = \cos 40^\circ, \quad \sin 70^\circ = \cos 20^\circ$$

پس  $A$  به صورت  $A = \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$  قابل نوشتن است. برای به دست آوردن مقدار  $A$ ، صورت و مخرج عبارت را در  $\sin 20^\circ$  ضرب می‌کنیم، این کار، مسئله را به دومینو تبدیل می‌کند و به کمک

$$\text{رابطه } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \text{ داریم:}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin 160^\circ}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \times \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}$$

از طرفی  $\sin(160^\circ) = \sin(\pi - 20^\circ) = \sin 20^\circ$  است، پس حاصل  $A$  برابر  $\frac{1}{8}$  می‌باشد.

(IQ کج)

۱۰۱. اگر داشته باشیم  $\sqrt{1 - \sin 40^\circ} = \cos 20^\circ + m \sin 20^\circ$ ، مقدار  $m \sin(\frac{5\pi}{6})$  کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$  (۴)
- $-1$  (۳)
- $1$  (۲)
- $\frac{1}{2}$  (۱)

### نکته محاسباتی رادیکال

**پاسخ:** گزینه ۴

با دیدن  $\sqrt{1 - \sin 40^\circ}$  سراغ فرمول‌های طلایی می‌رویم، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1 - \sin 40^\circ} = \sqrt{(\sin 20^\circ - \cos 20^\circ)^2} = |\sin 20^\circ - \cos 20^\circ|$$

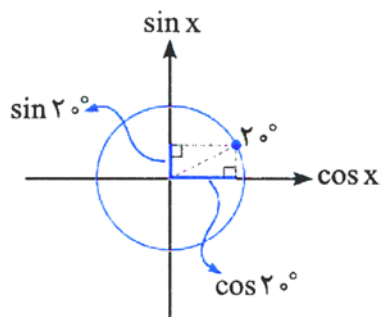
حالا برای تعیین علامت قدرمطلق بالا، سراغ دایره مثلثاتی می‌رویم:

$$\Rightarrow \cos 20^\circ > \sin 20^\circ$$

پس درون قدرمطلق منفی است و عبارت به صورت قرینه از قدرمطلق خارج می‌شود، پس داریم:

$$-(\sin 20^\circ - \cos 20^\circ) = \cos 20^\circ + m \sin 20^\circ \Rightarrow \cos 20^\circ - \sin 20^\circ = \cos 20^\circ + m \sin 20^\circ$$

برای برابری دو طرف معادله،  $m$  باید  $-1$  باشد. در نهایت خواسته مسئله برابر با  $-\frac{1}{2}$  است.  $(-1) \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = (-1)(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$  است.





(تجربی ۱۴۰۰)

۱۰۲. اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{36})$ ، کدام است؟

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{6 + \sqrt{3}}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = 16 \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = ?$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

می‌دانیم:

(۱)  $f(x)$  را در  $\sin^2 3x$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = 16 \frac{\sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x}{\sin^2 3x}$$

$$\frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\frac{1}{2} \sin 24x$$

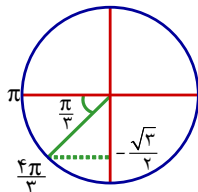
$$\frac{1}{2} \sin 48x$$

$$\Rightarrow f(x) = 16 \left( \frac{\sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x}{\sin^2 3x} \right)^2 \Rightarrow f(x) = 16 \left( \frac{\frac{1}{2} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{16} \times \frac{\sin^2 48x}{\sin^2 3x}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left( \frac{\frac{1}{2} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{16} \times \frac{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

(۲) حالا  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  رو حساب می‌کنیم:(۳) حالا  $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$  و  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  رو حساب کنیم و بذاریم سر جاشون:

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\frac{\pi}{12}$  یعنی  $15^\circ$  که ما قرار نیست نسبت‌های مثلثاتی آن را حفظ باشیم. پس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم تا

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

حالا می‌داریم سر جاشون:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{1}{16} \times \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{1}{16} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{16} \times \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{16} \times \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

مزدوج =  $4 - 3 = 1$



۱۰۳. اگر  $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$  باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{12})$  کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۰)



$\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$  (۴)

$\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$  (۳)

$\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$  (۲)

$\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$f(x) = 32 \cos^2 x \cos^2 2x \cos^2 4x \cos^2 8x \cos^2 16x \Rightarrow f(\frac{\pi}{12}) = ?$

(۱) می‌دونیم  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  هست و بنابراین  $\sin \alpha \cos \alpha$  میشه  $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ :

$f(x) = 32 (\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$

(۲) داخل پرانتز رو تو  $\sin x$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = 32 \left( \frac{\frac{1}{2} \sin 32x}{\frac{1}{2} \sin 16x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin 8x}{\frac{1}{2} \sin 4x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin 4x}{\frac{1}{2} \sin 2x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\sin x} \right)^2 \Rightarrow$$

$f(x) = 32 \left( \frac{\frac{1}{32} \sin 32x}{\sin x} \right)^2 = \frac{1}{32} \times \frac{\sin^2 32x}{\sin^2 x}$

(۳) حالا به جای  $x = \frac{\pi}{12}$  می‌ذاریم:

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{12}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{32 \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{16 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$





(ریاضی ۱۴۰۰)

۱۰۴. اگر  $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$  باشد، مقدار  $f(\frac{41\pi}{9})$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳) ۱      (۴)  $-۱$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha$$

$$f(\alpha) = 2 \sin \alpha (2 \cos 2\alpha + 1)$$

$$(\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$f(\alpha) = 2 \sin \alpha (2(1 - 2 \sin^2 \alpha) + 1) = 2 \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 2 \underbrace{(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)}_{\text{فرمول } \sin 3\alpha} \Rightarrow f(\alpha) = 2 \sin 3\alpha$$

(۳) حالا  $f(\frac{41\pi}{9})$  رو به دست می‌آوریم:  $f(\frac{41\pi}{9}) = 2 \sin(\frac{41\pi}{3}) = 2 \sin(14\pi - \frac{\pi}{3}) = 2 \sin(-\frac{\pi}{3}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$

۱۰۵. ساده شده عبارت  $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{16 \sin 6^\circ}$       (۲)  $\frac{1}{8 \sin 6^\circ}$       (۳)  $\frac{1}{\sin 6^\circ}$       (۴)  $\frac{16}{\sin 6^\circ}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 24^\circ}{\sin 12^\circ} \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 48^\circ}{\sin 12^\circ} \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 96^\circ}{\sin 12^\circ} \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \\ &= \frac{1 \sin 96^\circ}{8 \sin 12^\circ} \\ &= \frac{1 \cos 6^\circ}{8 \sin 12^\circ} = \frac{1 \cancel{\cos 6^\circ}}{8 \cancel{2 \sin 6^\circ \cos 6^\circ}} = \frac{1}{16 \sin 6^\circ} \end{aligned}$$



(معمومه)



۱۰۶. مقدار عبارت  $4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$  کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

**پاسخ:** گزینه ۲

**راهبرد:** هرگاه حاصل ضرب چند کسینوس داده شده باشد به طوری که کمان‌های این کسینوس‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ بدهند، برای ساده کردن آن کافی است کل عبارت را در سینوس کوچک‌ترین کمان ضرب و تقسیم کنیم.

$$A = 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} \quad 1$$

کمان‌ها دو برابر شدند

می‌دانیم که  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  است، لذا:

$$\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} \quad 2$$

$$\xrightarrow{2, 1} A = \frac{4 \times \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\overbrace{\sin 2\alpha}^{\sin 2\alpha}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin(2 \times \frac{2\pi}{5})}{\sin \frac{\pi}{5}} \Rightarrow A = \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} \xrightarrow{\text{دو زاویه } \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \text{ مکمل اند}} \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}} \rightarrow A = 1$$

(نردباز ۳ فیلی سبز)

۱۰۷. خلاصه شده عبارت  $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$  برابر کدام گزینه است؟

$\cos 40^\circ$  (۴)

$\cos 20^\circ$  (۳)

$\sin 40^\circ$  (۲)

$\sin 20^\circ$  (۱)

**پاسخ:** گزینه ۲

با کمک رابطه  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$  داریم:

$$\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \tan 20^\circ (2 \cos^2 20^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} (2 \cos^2 20^\circ) = \sin 20^\circ (2 \cos 20^\circ)$$

$$= 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ$$

در خط آخر از رابطه  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  استفاده کردیم.



(نردباز ۳ فیلی سبز)

۱۰۸. حاصل  $\left(\frac{1}{\cot 20^\circ} - \frac{1}{\tan 20^\circ}\right) \tan 40^\circ$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) -۲      (۳) ۱      (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{عبارت} = \tan 40^\circ (\tan 20^\circ - \cot 20^\circ)$$

با توجه به این که  $\frac{1}{\cot 20^\circ} = \tan 20^\circ$  و  $\frac{1}{\tan 20^\circ} = \cot 20^\circ$  داریم:

$$\text{عبارت} = \tan 40^\circ (-2 \cot 40^\circ) = -2$$

حالا از رابطه  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$  استفاده می‌کنیم:حاصل ضرب  $\tan x \cot x$  برابر ۱ است.

(نردباز ۳ فیلی سبز)

۱۰۹. حاصل  $\frac{1 - \cot 20^\circ}{1 - \tan 20^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan 70^\circ$       (۲)  $\cot 70^\circ$       (۳)  $-\tan 70^\circ$       (۴)  $-\cot 70^\circ$

پاسخ: گزینه ۳

از آن جا که  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= \frac{1 - \cot 20^\circ}{1 - \tan 20^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\tan 20^\circ}}{1 - \tan 20^\circ} = \frac{\tan 20^\circ - 1}{\tan 20^\circ (1 - \tan 20^\circ)} \\ &= \frac{- (1 - \tan 20^\circ)}{\tan 20^\circ (1 - \tan 20^\circ)} = \frac{-1}{\tan 20^\circ} = -\cot 20^\circ \end{aligned}$$

با توجه به این که  $\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$  بنابراین:

$$\text{عبارت} = -\tan 70^\circ$$

(IQ کج)

۱۱۰. حاصل  $\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$       (۲)  $8\sqrt{3}$       (۳)  $-4\sqrt{3}$       (۴)  $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج خواسته مسئله را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ = (\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ + \tan 15^\circ)$$

از طرفی می‌دانیم  $\tan \square + \cot \square = \frac{2}{\sin 2\square}$  و  $\cot \square - \tan \square = 2 \cot 2\square$  است، پس داریم:

$$(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ + \tan 15^\circ) = (2 \cot 30^\circ) \left(\frac{2}{\sin 30^\circ}\right) = (2\sqrt{3}) \left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right) = (2\sqrt{3})(4) = 8\sqrt{3}$$



۳: دو فریبزی، تابلو

تابلونه دیگه!!!

\* به تست ۱۷ مراجعه کنید.

۱۱۱. با فرض  $\cos(9\pi - \alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  و این که  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟ (موروماه)

$\frac{1}{3}$  (۱)       $\frac{-1}{3}$  (۲)       $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)       $\frac{-\sqrt{3}}{3}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا از رابطه‌ی  $\cos(9\pi - \alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  مقدار  $\cos \alpha$  را به دست می‌آوریم تا ببینیم به کجا می‌رسیم:

$$\cos(9\pi - \alpha) \xrightarrow{\text{بذار } 9\pi \text{ جای } \pi} \cos(\underbrace{\pi - \alpha}_{\text{ناحیه‌ی دوم}}) = -\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حالا برای این که به مقدار  $\tan \alpha$  برسیم، دو راه پیش‌رو داریم. یکی این که از رابطه‌ی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  مقدار  $\sin \alpha$  را یافته و از آنجا  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  را محاسبه کنیم و دیگر این که از رابطه‌ی  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  (که مستقیماً بین  $\tan \alpha$  و  $\cos \alpha$  برقرار است) استفاده کنیم (ما از روش دوم می‌رویم و روش اول را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌گذاریم).

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{-1} \tan^2 \alpha = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{حالا با توجه به حدود } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ (ناحیه‌ی چهارم)}} \tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

(تانژانت در ناحیه‌ی چهارم منفیه)!



۱۱۲. اگر  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$  باشد،  $\sin^2 x + \cos^2 x$  کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$(\sin x + \cos x)^2 = (-\sqrt{2})^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(نردبام فیلی سینز)

۱۱۳. حاصل  $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1$  کدام است؟



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

صفر (۳)

۳ (۲)

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1 - \cos^2(x - \frac{\pi}{4})}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - 1 + \cos^2(x - \frac{\pi}{4})}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - 1 + \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = -2 \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\text{از طرفی } \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -1 = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$



۱۱۴. در مثلث ABC رابطه‌ی  $\tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(\hat{C} + 30^\circ) = 1$  برقرار است. آنگاه:

$$\hat{A} = 30^\circ \quad (۴)$$

$$\hat{A} = 60^\circ \quad (۳)$$

$$\hat{A} = 120^\circ \quad (۲)$$

$$\hat{A} = 150^\circ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(\hat{C} + 30^\circ) = 1 \Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \frac{1}{\tan(\hat{C} + 30^\circ)}$$

$$\Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \cot(\hat{C} + 30^\circ) \Rightarrow (\hat{B} + 30^\circ) + (\hat{C} + 30^\circ) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(IQ کج)

۱۱۵. اگر  $\frac{1}{x} - x = 2 \cos \alpha$  باشد، مقدار  $\frac{1}{x^2} + x^2 - 4$  کدام است؟

$$2 \sin 2\alpha \quad (۴)$$

$$2 \cos 2\alpha \quad (۳)$$

$$\sin 2\alpha \quad (۲)$$

$$\cos 2\alpha \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای به وجود آمدن  $\frac{1}{x^2} + x^2$ ، طرفین معادله  $\frac{1}{x} - x = 2 \cos \alpha$  را به توان دو می‌رسانیم:

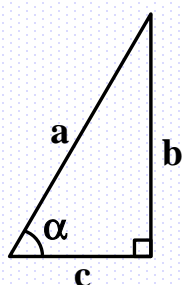
$$\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = (2 \cos \alpha)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + x^2 - 2 = 4 \cos^2 \alpha \xrightarrow{-2} \frac{1}{x^2} + x^2 - 4 = 4 \cos^2 \alpha - 2 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)$$

از طرفی می‌دانیم  $1 - \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  است، پس  $\frac{1}{x^2} + x^2 - 4 = 2 \cos 2\alpha$  می‌باشد.



## ۴: دو فریبزی، ناتابلو

(I) خوب



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{b}{a} \\ \cos \alpha = \frac{c}{a} \\ \tan \alpha = \frac{b}{c} \\ \cot \alpha = \frac{c}{b} \end{array} \right.$$

(II) بد نقاله

معروفات

$$\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\alpha < 25 \Rightarrow \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha =$$

$$\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha =$$

$$\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha =$$

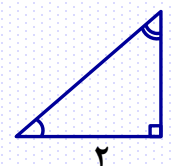
(1)

$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha =$$

$$= 2 \Rightarrow \alpha =$$

$$= 4 \Rightarrow \alpha =$$

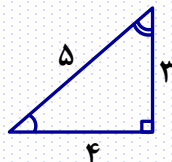
$$= 5 \Rightarrow \alpha =$$



(2)

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37^\circ \\ \beta = 53^\circ \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta = \frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37^\circ \\ \beta = 53^\circ \end{cases}$$



$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5} = 0.8 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37^\circ \\ \beta = 53^\circ \end{cases}$$

$$\cot \alpha = \tan \beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37^\circ \\ \beta = 53^\circ \end{cases}$$

(3)

$$\tan \alpha = \frac{2}{2} \simeq \sqrt{2} \Rightarrow \alpha =$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{2} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha =$$

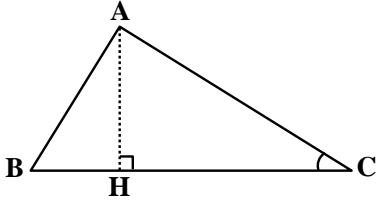
(III) زشت



## مقدمه

(ریاضی فارج ۹۹)

۱۱۶. در شکل زیر،  $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$  و  $AC = 96$ . اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟



۴۸ (۱)

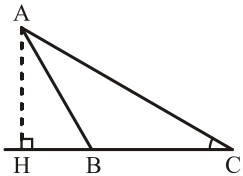
۵۶ (۲)

۶۴ (۳)

۷۲ (۴)

(ریاضی ۹۹)

۱۱۷. در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ . اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟



۳/۲۵ (۱)

۳/۵ (۲)

۳/۶ (۳)

۳/۷۵ (۴)

۱۱۸. در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )،  $BC^2 = 20$  و  $\tan \hat{C} = \frac{1}{3}$  است. مقدار  $\cos \hat{B}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (۴)$$

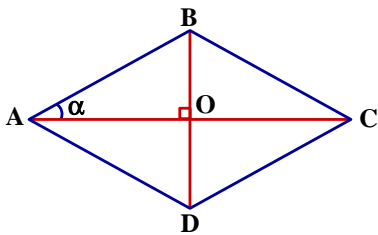
$$\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۱)$$

(قلم‌پی ۹۹)

۱۱۹. اگر محیط لوزی مقابل برابر ۴۰ واحد و  $\sin \alpha = \frac{6}{10}$  باشد مساحت لوزی چند واحد مربع است؟



۴۸ (۱)

۲۴ (۲)

۹۶ (۳)

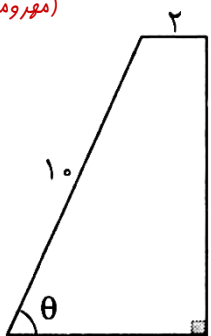
۶۹ (۴)





۱۲۰. اگر  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  باشد، آن گاه مساحت ذوزنقه‌ی روبه‌رو کدام است؟

(معروماه)



۴۲ (۱)

۴۰ (۲)

۳۶ (۳)

۴۸ (۴)

## (I) خوب

۱۲۱. اگر  $\alpha$  در ناحیه‌ی چهارم و  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$  باشد، مقدار  $\cot \alpha$  کدام خواهد بود؟

(معروماه)



$\frac{-3\sqrt{10}}{10}$  (۴)

$\frac{-3\sqrt{10}}{20}$  (۳)

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (۲)

$\frac{3\sqrt{10}}{20}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می‌توانیم به کمک رابطه‌ی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، ابتدا  $\sin \alpha$  را یافته و سپس با توجه به رابطه‌ی  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ،

مقدار  $\cot \alpha$  را بیابیم:

$\sin^2 \alpha \frac{9}{49} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$  **جذریگیر**  $\rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{40}}{7} = \pm \frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\sin \alpha < 0$  در ناحیه‌ی چهارم و  $\rightarrow \sin \alpha = \frac{-2\sqrt{10}}{7}$  **حالا**  $\rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$\frac{3}{\frac{-2\sqrt{10}}{7}} = -\frac{3}{2\sqrt{10}}$  یا  $\frac{-3}{2\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{20}$



(معروماه)

۱۲۲. اگر  $\sin 27^\circ$  برابر  $a$  فرض شود، حاصل  $\tan 153^\circ$  بر حسب  $a$  کدام خواهد بود؟

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (۴) \quad -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad (۲) \quad -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

قبل از هر چیز توجه داریم که زاویه  $153^\circ$  و  $27^\circ$  مکمل (کامل کننده) یکدیگرند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\tan 153^\circ = \tan(180^\circ - 27^\circ) = -\tan 27^\circ = ?$$

ناحیه‌ی دوم

از طرفی رابطه‌ی بین  $\cot 27^\circ$  (عکس  $\tan 27^\circ$ ) و  $\sin 27^\circ$  به صورت  $1 + \cot^2 27^\circ = \frac{1}{\sin^2 27^\circ}$  است؛ پس:

$$1 + \cot^2 27^\circ = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \cot^2 27^\circ = \frac{1}{a^2} - 1 = \frac{1-a^2}{a^2} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}}$$

$$\cot 27^\circ = \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \xrightarrow{\substack{a = \sin 27^\circ > 0 \\ \cot 27^\circ > 0}} \cot 27^\circ = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس کن}} \frac{1}{\cot 27^\circ} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow \tan 27^\circ = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \xrightarrow{\text{در نهایت}} \tan 153^\circ = -\tan 27^\circ = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

۱۲۳. برای زاویه‌ی حاده‌ی  $\alpha$ ، رابطه‌ی  $\cos(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \frac{5}{13}$  برقرار است. مقدار  $\tan \alpha + \cot \alpha$  کدام است؟ (معروماه)

$$\frac{156}{313} \quad (۴) \quad \frac{313}{156} \quad (۳) \quad \frac{60}{169} \quad (۲) \quad \frac{169}{60} \quad (۱)$$



پاسخ: گزینه ۱

از رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\cos(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha = \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{حالا با توجه به رابطه‌ی}} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{25} \Rightarrow$$

ناحیه‌ی اول حذف مضرب زوج  $\pi$

$$\cot^2 \alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} \cot \alpha = \pm \frac{12}{5} \xrightarrow{\text{حاده است}} \cot \alpha = \frac{12}{5} \text{ و } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{12} + \frac{12}{5} = \frac{25 + 144}{60} = \frac{169}{60}$$



۱۲۴. فرض کنید زاویه  $\alpha$  در ناحیه چهارم مثلثاتی و  $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$  باشد. حاصل عبارت  $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$  کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۱)$$

(معروماه)

۱۲۵. با فرض  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{16}$  و  $\sin(8\alpha + 9\beta) = \frac{12}{13}$ ، مقدار  $\cot \beta$  کدام است؟

$$\frac{13}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{12}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{13} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا روی کمان  $(8\alpha + 9\beta)$ ، با توجه به فرض  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{16}$ ، کار می‌کنیم:

$$8\alpha + 9\beta = 8\alpha + 8\beta + \beta = 8(\underbrace{\alpha + \beta}_{\frac{\pi}{16}}) + \beta = 8(\frac{\pi}{16}) + \beta = \frac{\pi}{2} + \beta$$

در نتیجه  $\rightarrow \sin(8\alpha + 9\beta) = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \beta}_{\text{ناحیه دوم}}) = \cos \beta = \frac{12}{13}$

حال با توجه به رابطه  $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$ ، می‌توانیم  $\tan \alpha$  و از آنجا  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$  را محاسبه کنیم:

$$1 + \tan^2 \beta = \frac{169}{144} \Rightarrow \tan \beta = \frac{169}{144} - 1 = \frac{25}{144} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} \tan \beta = \pm \frac{5}{12} \Rightarrow \cot \beta = \frac{1}{\tan \beta} = \pm \frac{12}{5}$$

با توجه به گزینه‌ها  $\rightarrow \cot \beta = \frac{12}{5}$



(معمومه)

۱۲۶. اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{5}$  و  $\alpha$  در ناحیه سوم باشد، حاصل  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  کدام است؟

(۴)  $\frac{5}{\sqrt{34}}$

(۳)  $\frac{-19}{\sqrt{34}}$

(۲)  $\frac{19}{\sqrt{34}}$

(۱)  $\frac{-5}{\sqrt{34}}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا با توجه به رابطه  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  مقدار  $\cos^2 \alpha$  را محاسبه می‌کنیم:

$1 + \frac{9}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{34}$  *جذر بگیر*  $\rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{34}}$

*در ناحیه سوم قرار دارد، پس  $\cos \alpha < 0$*   $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{34}}$

و اما برای محاسبه مقدار  $\sin \alpha$ ، از رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  استفاده کرده و داریم:

$\sin^2 \alpha + \frac{25}{34} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{34} = \frac{9}{34}$  *جذر بگیر*  $\rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{34}}$  *در ناحیه سوم  $\sin \alpha < 0$*   $\rightarrow \sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}}$

*و بالاخره حاصل عبارت*  $\rightarrow (3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha) = \frac{-9}{\sqrt{34}} - \frac{10}{\sqrt{34}} = \frac{-19}{\sqrt{34}}$

(تجربی فارغ ۹۸)

۱۲۷. اگر  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟



$\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{2} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

(۴)  $0/48$

(۳)  $0/27$

(۲)  $-0/52$

(۱)  $-1/23$

(IQ گاج)

۱۲۸. اگر  $\tan(\frac{7\pi}{2} + 2x) = 3$  باشد، حاصل  $-\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) + \cos(-\pi + 2x)$  کدام است؟

(۴)  $\frac{-3\sqrt{10}}{5}$

(۳)  $\frac{3}{5}$

(۲)  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

(۱)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$





(معموماه)

۱۲۹. اگر  $\cot x = \frac{3}{2}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{5 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x - \sin x}$  کدام است؟

$$\frac{16}{7} \quad (4)$$

$$\frac{15}{7} \quad (3)$$

$$\frac{13}{7} \quad (2)$$

$$\frac{12}{7} \quad (1)$$

بچه معروف

### استراتژی ۴ آریان حیدری:

\* در صورت امکان تست‌های ۱۲۶ الی ۱۲۸ را با این روش حل کنید.

(IQ گاج)

۱۳۰. اگر  $\tan x = 2$  باشد، حاصل  $A = \frac{5 \sin^2 x + 6 \cos^2 x}{2 \sin^4 x - 19 \cos^4 x}$  کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

خطر!

پاسخ: گزینه ۳

طبق فرض مسئله  $\tan x = 2$  است، پس می‌توان نوشت:

$$\tan x = 2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \sin x = 2 \cos x$$

حالا با جای‌گذاری این عبارت در  $A$ ، خواهیم داشت:

$$A = \frac{5 \sin^2 x + 6 \cos^2 x}{2 \sin^4 x - 19 \cos^4 x} \xrightarrow{\sin x = 2 \cos x} \frac{5(2 \cos x)^2 + 6 \cos^2 x}{2(2 \cos x)^4 - 19 \cos^4 x} = \frac{5(4 \cos^2 x) + 6 \cos^2 x}{4(16 \cos^4 x) - 19 \cos^4 x}$$

$$= \frac{20 \cos^2 x + 6 \cos^2 x}{64 \cos^4 x - 19 \cos^4 x} = \frac{26 \cos^2 x}{45 \cos^4 x} = \frac{26}{45 \cos^2 x}$$

$$\frac{26}{45 \cos^2 x} = 2(1 + \tan^2 x) \xrightarrow{\tan x = 2} \frac{26}{45 \cos^2 x} = 2(1 + 2^2) = 10$$

از طرفی می‌دانیم  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  پس داریم:



(تجربی ۹۴)

۱۳۱. حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$  کدام است؟

$\frac{16}{9}$  (۴)

$\frac{9}{16}$  (۳)

$\frac{-9}{16}$  (۲)

$\frac{-16}{9}$  (۱)

(تجربی خارج ۹۴)

۱۳۲. حاصل عبارت  $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$  با فرض  $\tan 2^\circ = \frac{1}{4}$  کدام است؟



$\frac{5}{8}$  (۴)

$\frac{7}{3}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{-3}{4}$  (۱)

(موج آزمون الگو)

۱۳۳. اگر  $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 335^\circ}$  کدام است؟



$\frac{a+1}{3a-1}$  (۴)

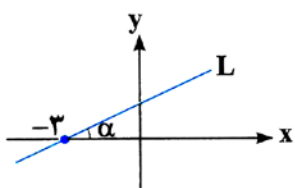
$\frac{3a-1}{a+3}$  (۳)

$\frac{3a-1}{a-3}$  (۲)

$\frac{3a+1}{3-a}$  (۱)

(IQ کج)

۱۳۴. با فرض  $\frac{\cos(2\pi - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) + 2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{3}{4}$ ، معادله خط L کدام است؟



$y = -4x - 12$  (۱)

$y = 4x + 12$  (۲)

$y = -2x - 6$  (۳)

$y = 2x + 6$  (۴)



(تقریبی ۱۱)

۱۳۵. اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} = 1$  باشد، مقدار  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

(تقریبی ۱۱)

۱۳۶. با فرض  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  مقدار  $\cos 4\alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{17}{64}$  (۲)  $\frac{17}{32}$  (۳)  $-\frac{17}{64}$  (۴)  $-\frac{17}{32}$

۱۳۷. اگر  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد، حاصل  $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$  کدام است؟ (مهر و ماه)

(۱)  $-4\sqrt{5}$  (۲)  $4\sqrt{5}$  (۳)  $2\sqrt{5}$  (۴)  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \xrightarrow{\text{کوتانژانت منفی هم‌نوا و مخالف}} \cot\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = -\tan 2x$$

ربع چهارم

برای محاسبه‌ی  $\tan 2x$ ، طبق رابطه‌ی  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$  باید  $\tan x$  را داشته باشیم. لذا طبق فرمول‌های مقدماتی داریم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{9}{5} - 1 = \frac{9-5}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

انتهای کمان  $x$  در ربع دوم  $\tan x < 0$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{-4 \times 5}{\sqrt{5}} = \frac{-4 \times 5 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{-4 \times 5 \times \sqrt{5}}{5} = -4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -4\sqrt{5}$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = -\tan 2x = -(-4\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

و اما جواب مسئله:



(معمومه)



۱۳۸. اگر  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

$$-\frac{12}{25} \quad (۴)$$

$$-\frac{24}{25} \quad (۳)$$

$$\frac{12}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{24}{25} \quad (۱)$$

خطر!

پاسخ: گزینه ۱

کافی است رابطه‌ی  $\sin 2\alpha$  را بر حسب  $\tan \alpha$  بنویسیم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{25}{9}} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$$

۱۳۶. اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۰)

$$-\frac{1056}{175} \quad (۴)$$

$$\frac{96}{175} \quad (۳)$$

$$\frac{1056}{175} \quad (۲)$$

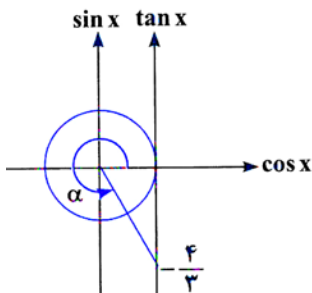
$$-\frac{96}{175} \quad (۱)$$

خطر!



(IQ کج)

۱۴۰. با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، حاصل  $\sin(-2\pi + 2\alpha)$  کدام است؟



$$-\frac{12}{25} \quad (۱)$$

$$-\frac{24}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{24}{25} \quad (۳)$$

$$\frac{12}{25} \quad (۴)$$





(معمومه)

۱۴۱. اگر  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$  باشد، حاصل  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$
- (۲)  $\sqrt{2}$
- (۳) ۲
- (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مطابق با فرمول‌های طلایی، کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

(ریاضی ۱۳۰۰)

۱۴۲. اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{91}{105}$
- (۲)  $-\frac{16}{105}$
- (۳)  $\frac{16}{105}$
- (۴)  $\frac{91}{105}$

روش ۱:

روش ۲: **زرنگ باش!**

(IQ کاج)

۱۴۳. اگر  $\tan 2x = \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{1 - \cos^2 2x}{1 + \sin 4x}$  بر حسب  $\pi$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\pi + 1}{4}$
- (۲)  $\frac{\pi^2}{1 + \pi^2}$
- (۳)  $\frac{\pi^2}{\pi^2 - 1}$
- (۴)  $\frac{\pi^2}{(1 + \pi)^2}$

(تجربی ۹۴)

۱۴۴. اگر  $\tan \beta = \frac{1}{4}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $0/49$
- (۲)  $0/6$
- (۳)  $0/75$
- (۴)  $0/8$

روش ۱:

روش ۲:



## بد (II)

(IQ کج)

۱۴۵. اگر  $\cos 2x = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\cos(\pi + x)\cos(-x)$  کدام است؟

$$-\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

روش ۱:

روش ۲:

۱۴۶. اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{4}$  و زاویه  $\alpha$  در ربع اول باشد، حاصل  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$  کدام است؟

$$\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{5}}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad (۱)$$

روش ۱:

روش ۲:

پاسخ: گزینه ۳

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = \frac{1}{4}} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{در ربع اول}} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{2\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج کسر}} \frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5})}{10} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10}$$



۱۴۷. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و  $\cos \alpha = \frac{-5}{13}$  باشد،  $\cot \frac{\alpha}{2}$  کدام است؟

$$\frac{-3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{-2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

روش ۱:

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{2}{5} \quad \frac{6}{5}$$

$$\alpha = 180^\circ + 68^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} = 90^\circ + 34^\circ$$

$$\text{حکم: } \cot \frac{\alpha}{2} = \cot(90^\circ + 34^\circ) = -\tan 34^\circ \approx -\tan 35^\circ = \frac{-2}{3}$$

روش ۲:

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin^2 \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \rightarrow \frac{-12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-12}{13} \cdot \frac{13}{-5} = \frac{12}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow 12 + 12 \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 10 \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 12 \tan^2 \frac{\alpha}{2} - 10 \tan \frac{\alpha}{2} + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 6 \tan^2 \frac{\alpha}{2} - 5 \tan \frac{\alpha}{2} + 6 = 0 \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{2}{3}, \frac{-3}{2}$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} < 0 \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}$$



(رشته ریاضی) (تقریبی فارغ ۹۳)

۱۴۸. اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\tan(2\alpha - \beta)$  کدام است؟

- (۱) -۳      (۲) -۲      (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۳

روش:

روش ۲: فقط رشته ریاضی!

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(2)}{1 - (2)^2} = \frac{-4}{3} \quad \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (\frac{-4}{3})(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{-5}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{-5}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{-9}{3} = -3$$

\* به روش ۲ تست‌های ۱۴۴ و ۱۴۵ مراجعه کنید.

(رشته ریاضی) (سنجش ۹۵)

۱۴۹. حاصل  $\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$  کتانزانت کدام زاویه است؟

- (۱)  $15^\circ$       (۲)  $7/5^\circ$       (۳)  $67/5^\circ$       (۴)  $75^\circ$

روش:

روش ۲: فقط رشته ریاضی!

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{12} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cot \frac{5\pi}{12} = \cot 75^\circ$$



۱۵۰. اگر  $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha) = \frac{3}{5}$  باشد، مقدار مثبت  $\tan \alpha$  کدام است؟

(نردبانی فیلی سبز)

$\frac{2}{4}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

روش ۱:

روش ۲:

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow -\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

از اتحاد  $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$  داریم:

حالا با استفاده از رابطه  $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$  داریم:

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - (-\frac{3}{5})}{1 + (-\frac{3}{5})} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$$

پس مقدار مثبت  $\tan \alpha$  برابر ۲ است.

۱۵۱. اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است؟

(تیرپی ۹۶)

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۳)

$-\frac{3}{2}$  (۲)

$-\frac{3}{4}$  (۱)

روش ۱:

روش ۲:

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم که:

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

حال کافی است در رابطه‌ی فوق  $\alpha$  را برابر  $\frac{x}{2}$  قرار دهیم، در نتیجه داریم:

$$\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot(2 \times \frac{x}{2}) \xrightarrow{\times(-1)} \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{*} \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{2}$$



(رشته ریاضی) (ریاضی قارج ۱۱۱)

۱۵۲. اگر  $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{5}$  (۳)

$\frac{-1}{5}$  (۲)

$\frac{-1}{3}$  (۱)

روش ۱:

روش ۲: فقط رشته ریاضی!

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + (1)(\frac{3}{2})} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{-1}{5}$$

\* به تست‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰ مراجعه کنید.



۱۵۳. خطوط  $ax - y = 3$  و  $3y + x = -9$ ، یکدیگر را در نقطه A و خط  $y - x = 0$  را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند. اگر مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC،

مقدار  $\tan(B - C)$  کدام است؟

(تهری ۱۴۰۲)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

۱۵۴. خطوط  $x + 2y = 3$  و  $2x + ay = 6$ ، یکدیگر را در نقطه A و خط  $x + y = 0$  را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند. اگر مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد، بر نیمساز ناحیه دوم واقع باشد، مقدار  $\cot(B - C)$  در

مثلث ABC کدام است؟

(تهری خارج ۱۴۰۲)



$-\frac{4}{3}$  (۴)

$-\frac{3}{5}$  (۳)

$-\frac{3}{4}$  (۲)

$-\frac{5}{3}$  (۱)



ویژه دانش آموزان رشته ریاضی

\* به روش ۲ تست‌های ۱۵۲ و ۱۴۸ مراجعه کنید.

۱۵۸. اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند،  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳) -۳
- (۴) -۱

روش ۱: دو فریبزی ناتابلو بد:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\text{ریشه‌ها} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} = \frac{1}{4}, \frac{-7}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 15^\circ \\ \tan \beta = \frac{-7}{4} \Rightarrow \beta = -60^\circ \end{cases}$$

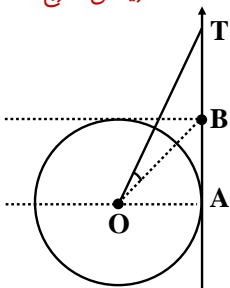
$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(15^\circ - 60^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

روش ۲: تبدیل به دو فریبزی ناتابلو خوب:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{s}{1 - p} = \frac{-3}{1 - (\frac{-1}{4})} = -1$$

(ریاضی خارج ۹۹)

۱۵۶. با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر  $BT = 2$  باشد، مقدار  $\tan(\hat{T}OB)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{4}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴)  $\frac{2}{3}$

روش ۱: دو فریبزی ناتابلو بد:

$$\hat{T}OB = \hat{T}OA - \hat{B}OA = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$$

$\downarrow$                    $\downarrow$   
 $\tan = 3$            $\tan = 1$   
 $\downarrow$                    $\downarrow$   
 $70^\circ$                  $45^\circ$

$$\tan(\hat{T}OB) = \tan 25^\circ = \frac{1}{2}$$

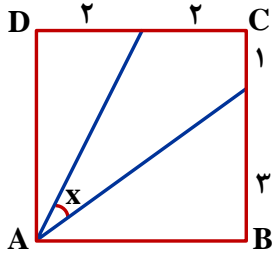
روش ۲: تبدیل به دو فریبزی ناتابلو خوب:

$$\tan(\hat{T}OB) = \tan(\underbrace{\hat{T}OA}_{\alpha} - \underbrace{\hat{B}OA}_{\beta}) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 - 1}{1 + (3)(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$





۱۵۷. در مربع زیر، مقدار  $\tan x$  کدام است؟



$\frac{1}{2}$  (۲)  
 $\frac{2}{5}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۱)  
 $\frac{1}{3}$  (۳)

روش ۱: دو فریبزی ناتابلو بد:

$$x = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - (25^\circ + 40^\circ) = 25^\circ \rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $\tan = \frac{1}{2}$                  $\tan = \frac{3}{4}$   
 $25^\circ$                      $37^\circ \approx 40^\circ$

روش ۲: تبدیل به دو فریبزی ناتابلو خوب:

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cot(\alpha + \beta)$$

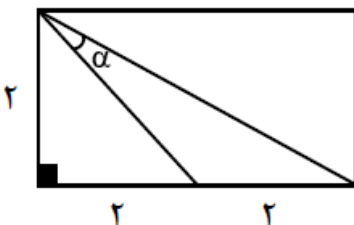
$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{3}{4} \\ \tan \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = 2$$

$$\Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$$

۱۵۸. در شکل زیر مقدار  $\cot \alpha$  کدام است؟

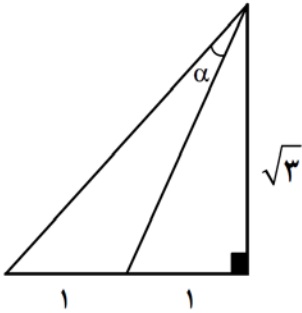
(ریاضی ۱۴۰۲)



- ۱ (۱)
- ۳ (۲)
- $\frac{1}{2}$  (۳)
- $\frac{1}{3}$  (۴)



(ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱۵۹. در شکل زیر، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

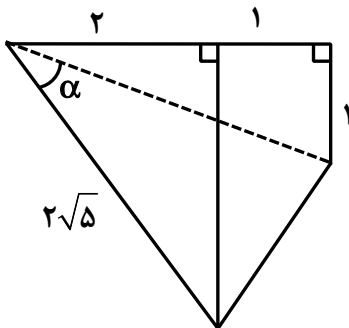
$$\frac{1}{5\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (4)$$

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱۶۰. در شکل زیر، مقدار  $\cos \alpha$  چقدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{10} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (4)$$



۱۶۱. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع اول دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  باشد، مقدار  $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$  کدوم است؟

(ریاضی قارچ ۹۹)

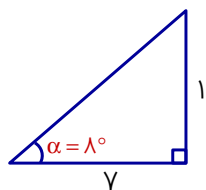
$\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{3}{5}$  (۳)

$-\frac{3}{5}$  (۲)

$-\frac{4}{5}$  (۱)

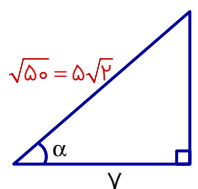
روش ۱: دو فریبزی ناتابلو بد:



$\Rightarrow \sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha) = \sin(\underbrace{13 \times 45^\circ}_{45^\circ + 135^\circ} + 18^\circ) = \sin(233^\circ) = \sin(180^\circ + 53^\circ) = -\sin 53^\circ = -\frac{4}{5}$

روش ۲: تبدیل به دو فریبزی ناتابلو خوب:

$\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha) = \underbrace{\sin(\frac{13\pi}{4})}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \alpha + \underbrace{\cos(\frac{13\pi}{4})}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \alpha$



$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{cases}$

جواب آخر :  $(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{5\sqrt{2}}) = \frac{-\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{10} = \frac{-\sqrt{5}-1}{10} = \frac{-4}{5}$



۱۶۲. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایره مثلثاتی و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$  کدوم است؟

(ریاضی ۹۹)

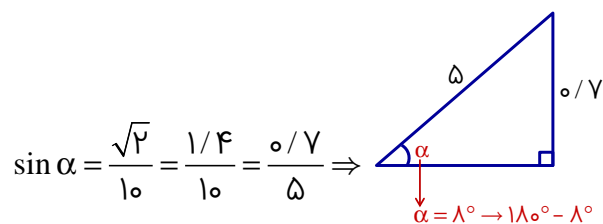
$$\frac{4}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{3}{5} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{4}{5} \text{ (۱)}$$

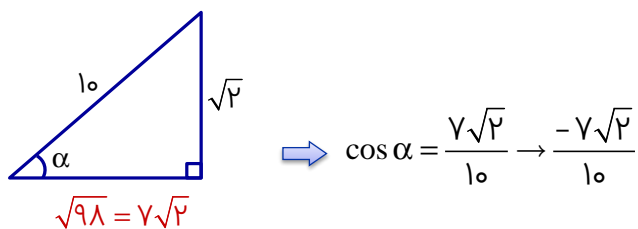
روش ۱: دو فریبزی ناتابلو بد:



$$\Rightarrow \cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha) = \cos(\underbrace{11 \times 45^\circ}_{\substack{450^\circ + 45^\circ \\ 90^\circ}} + \underbrace{180^\circ - 8^\circ}) = \cos(270^\circ + 37^\circ) = \sin 37^\circ = \frac{3}{5}$$

روش ۲: تبدیل به دو فریبزی ناتابلو خوب:

$$\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha) = \underbrace{\cos \frac{11\pi}{4}}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \alpha - \underbrace{\sin(\frac{11\pi}{4})}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \alpha$$



جواب آخر:  $(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{7\sqrt{2}}{10}) - (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{10}) = \frac{+7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$



۱۶۳. در معادله مثلثاتی  $\sqrt{6} = m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x)$  اگر  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  باشد، مقدار  $m$

(ریاضی ۱۴۰۲)

کدام است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

۱۶۴. در معادله مثلثاتی  $1 = 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  اگر  $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  باشد، مقدار  $m$

(ریاضی فارغ ۱۴۰۲)

کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

$-\sqrt{3}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)

۱۶۵. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sqrt{2} = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱)

$\frac{11\pi}{6}$  (۴)

$\frac{9\pi}{4}$  (۳)

$\frac{7\pi}{3}$  (۲)

$\frac{\pi}{3}$  (۱)



### زشت (III)

۱۶۶. اگر  $\frac{1 + \sin x}{1 - 2 \sin x} = 2$  باشد، حاصل  $\tan \frac{x}{2} (\tan \frac{x}{2} - 10)$  کدام است؟

- ۱ (۴)                      ۱ (۳)                      -۱ (۲)                      -۲ (۱)

(ریاضی فارغ ۱۳۰۱)

۱۶۷. اگر انتهای کمان  $x$  در ربع سوم و  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$  باشد، مقدار صحیح  $\tan \frac{x}{2}$  کدام است؟

- ۳ (۴)                      ۳ (۳)                      -۲ (۲)                      ۲ (۱)



$$\sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow$$

(IQ گج)

۱۶۸. اگر  $1 - \cos x = \frac{1}{3 + 3 \cos x}$  باشد،  $\cot^2 x$  کدام است؟

- ۵ (۴)                      ۴ (۳)                      ۳ (۲)                      ۲ (۱)





(IQ گاج)

۱۶۹. اگر  $\tan^6 x + 2 \tan^2 x = 24$  باشد، حاصل  $3 + \cos^2 x$  کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



(نردبام فیلی سبز)

۱۷۰. اگر  $\cot x = 2 + 2 \cot 2x$ ، حاصل  $\sin 2x - \cos 2x$  کدام است؟

۱/۴ (۴)

۱/۲ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۲ (۱)



(نردبام فیلی سبز)

۱۷۱. اگر  $\frac{\tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$ ، حاصل  $\sin 4\alpha$  کدام است؟ $\frac{3}{4}$  (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲) $\frac{1}{2}$  (۱)



(نردباز ۴ فیلی سبز)

۱۷۲. اگر  $\cos x < 0$  و  $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $\tan(\pi - x)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (۴)} \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (۲)} \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (۱)}$$

(تجربی ۱۴۰)

۱۷۳. اگر  $\frac{4}{3} = 2 \sin^2 x + \cos^2 x$  باشد، حاصل  $\tan^2 x$  کدام است؟ ( $x \neq 0$ )

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

(IQ گاج)

۱۷۴. با فرض  $4 \sin^5 x = \frac{1}{2} - 4 \sin^3 x \cos^2 x$ ، حاصل  $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$  کدام است؟

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{-1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۱)}$$





(IQ کج)

۱۷۵. اگر  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل  $(\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)(\tan^2 \theta - \sin^2 \theta)$  کدام است؟

$$\frac{1}{32} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$



۱۷۶. با فرض  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{5}{3}$ ، مقدار مثبت  $\cos \alpha$  کدام است؟

$$\frac{34}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{34} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{34}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3\sqrt{34}}{34} \quad (۱)$$



(IQ کج)

۱۷۷. اگر  $4 \tan x + \cot x = 4$  باشد، حاصل  $\sin 2x$  کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۱)$$





### بچه معروف:

tan , cot با توان های مساوی + , -

تبدیل به sin و cos

۱۷۸. اگر  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$  مقدار  $\tan 2x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$
- (۲)  $\frac{3}{4}$
- (۳)  $\frac{4}{3}$
- (۴)  $-\frac{3}{2}$

روش ۱: مشابه ۱۶۸

روش ۲:

$$\frac{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{-\cos x}{1 + \sin x} = 1 \Rightarrow -2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$



(تجربی مورد ۱۴۰۱)

۱۷۹. اگر  $\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{4}{3}$  مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{2}{3}$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $-\frac{3}{2}$
- (۴)  $-\frac{2}{3}$

۱۸۰. اگر  $\frac{1 + \cot^2 x}{\sin x} = 27$  و  $\sin x + \cos x < 0$  باشد، انتهای کمان x در ناحیه ..... مثلثاتی و مقدار  $\tan x$  برابر

(IQ گاج)

با ..... است.

- (۱) اول،  $2\sqrt{2}$
- (۲) اول،  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- (۳) دوم،  $-2\sqrt{2}$
- (۴) دوم،  $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$





(تیربی ری ۱۴۰)

۱۸۱. اگر  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۲)$$

$$-\frac{2\sqrt{5}}{10} \quad (۱)$$

(نردبام فیلی سبز)

۱۸۲. اگر  $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 2$  باشد، حاصل  $\sin 2x$  کدام است؟

$$-0.6 \quad (۴)$$

$$0.6 \quad (۳)$$

$$-0.8 \quad (۲)$$

$$0.8 \quad (۱)$$



$$* \cos 4x = ?$$

(IQ کج)

۱۸۳. اگر  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 3$  باشد، حاصل  $\tan 2x$  کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$





(تجربی فارغ ۹۵)

۱۸۴. اگر  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۲

(IQ کج)

۱۸۵. اگر  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 4$  باشد، حاصل  $\tan \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$       (۲)  $-\frac{4}{3}$       (۳)  $\frac{3}{4}$       (۴)  $-\frac{3}{4}$



تمرین مهم کتاب درسی:



(قلم‌پی ۱۴۰۲)

۱۸۶. اگر  $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{5}{2}$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\cos x} - \tan x$  کدام است؟

- (۱) ۰/۴      (۲) ۰/۸      (۳) ۱/۲۵      (۴) ۲/۵



بچه معروف:

+ , - sin , cos با توان های مساوی

↓  
توان ۲

(ریاضی ۱) (تجربی ۹۵)

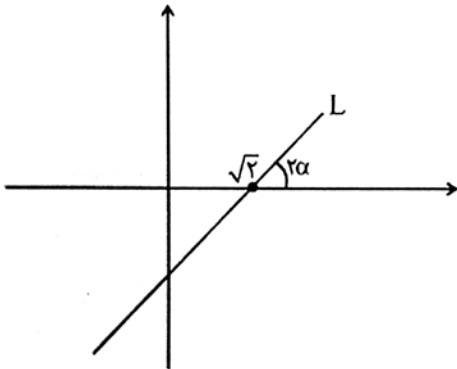
• اگر  $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}}{7}$  مطلوبست محاسبه ی:

۱۸۷.  $\sin 2x = ?$

۱۸۸.  $\cos 4x = ?$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left( \frac{44}{49} \right)^2$$

۱۸۹. اگر  $\sin(\frac{19\pi}{4}) \sin \alpha + \cos(945^\circ) \cos \alpha = \frac{1}{3}$  باشد، عرض از مبدأ خط L کدام است؟  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$



- (۱)  $-\frac{3}{4}$
- (۲)  $-\frac{4}{3}$
- (۳)  $-\frac{4}{7}$
- (۴)  $-\frac{7}{4}$



• اگر  $\frac{1}{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  مطلوبست محاسبه‌ی:

$$190. \sin^3 x + \cos^3 x = ?$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\underbrace{\sin x + \cos x}_{\frac{1}{3}}) (\underbrace{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}_{-\frac{4}{9}}) = \frac{1}{3} (1 + \frac{4}{9}) = \frac{13}{27}$$

$$191. \sin^6 x + \cos^6 x = ?$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = 1 - 3 (\underbrace{\sin x \cos x}_{-\frac{4}{9}})^2 = \frac{33}{81}$$

$$192. \tan x + \cot x = ?$$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1}{\underbrace{\sin x \cos x}_{-\frac{4}{9}}} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = -\frac{9}{4}$$

$$193. (1 - \tan x)(1 - \cot x) = ?$$

$$(1 - \tan x)(1 - \cot x) = 1 - (\underbrace{\tan x + \cot x}_{-\frac{9}{4}}) + 1 = \frac{17}{4}$$

$$194. \sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} = ?$$

$$\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} = ? \Rightarrow \underbrace{\cot x + \tan x}_{-\frac{9}{4}} + 2 = ? \Rightarrow \frac{-1}{4} = ?$$

خطرا!

(تجربی قارچ ۱۴۰۱)

۱۹۵. اگر  $6\sqrt{5}(\sin x + \cos x) = 10$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام عدد می‌تواند باشد؟

$$3 \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad -\frac{1}{3} \quad (1)$$





۱۹۶. اگر  $\sin x \cos x = \frac{3}{8}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه چهارم باشد، حاصل  $\sin x - \cos x$  کدام است؟ (نردبام فیلی سبز)

$-\frac{1}{2}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱۹۷. اگر  $\tan x + \cot x = -3$  و  $3\pi < 4x < 4\pi$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$  کدام است؟

$0.5\sqrt{6}$  (۴)       $-0.75\sqrt{3}$  (۳)       $0.75\sqrt{3}$  (۲)       $-0.5\sqrt{6}$  (۱)

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱۹۸. اگر  $\tan x + \cot x = 4$  و  $5\pi < 4x < 6\pi$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x}$  کدام است؟



$\frac{1/6}{\sqrt{3}}$  (۴)       $-\frac{1/6}{\sqrt{3}}$  (۳)       $0.1\sqrt{2}$  (۲)       $-0.1\sqrt{2}$  (۱)



(علی سنج ۱۴۰۱)

۱۹۹. اگر  $\sqrt{2} \sin x - 2 \cos x = \sqrt{3}$  باشد، حاصل  $\tan 2x$  کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

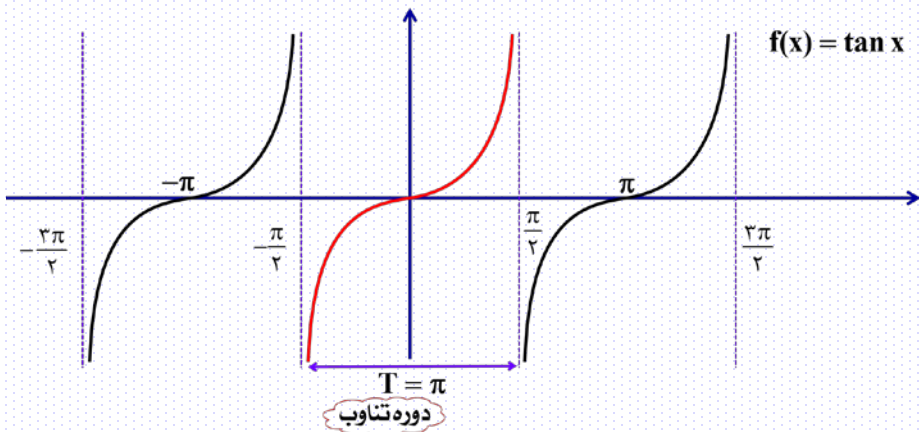
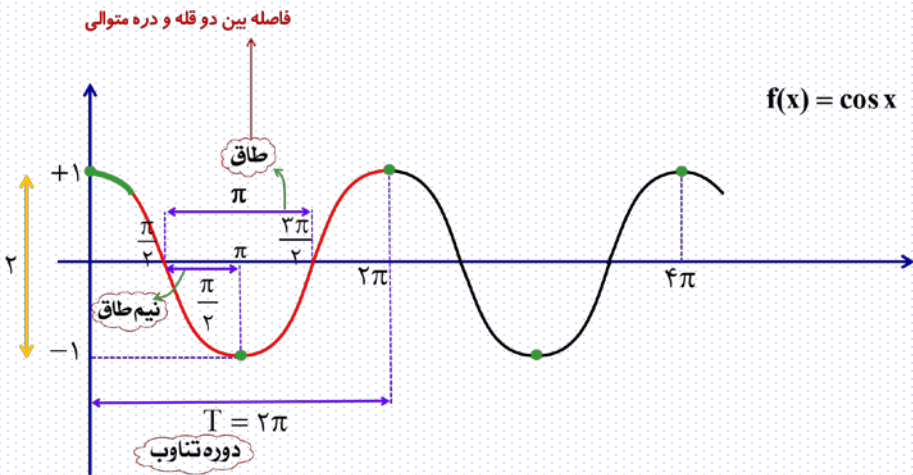
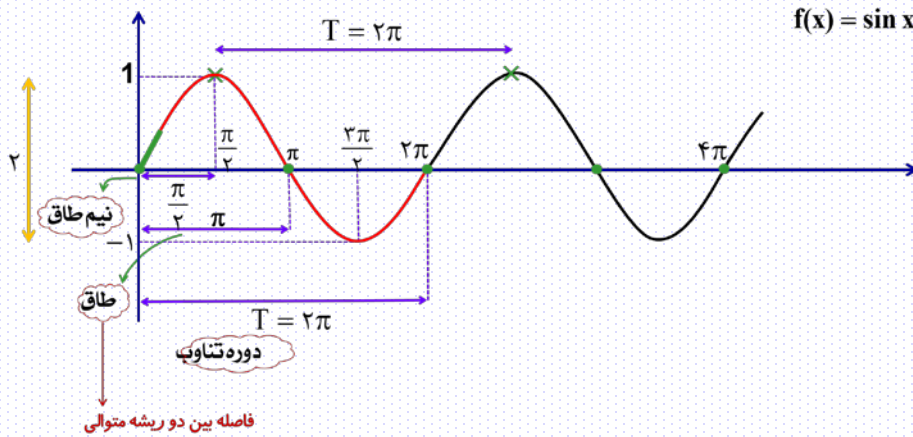
$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

\* حالت خاص: جمع و تفریق  $\sin$  و  $\cos$  با ضرایب غیر مساوی خاص. ← رشته ریاضی، به تست ۱۶۵ مراجعه کنید.





نمودار توابع مثلثاتی



\* یکنوایی؟

\* دامنه؟

\* نتیجه ۱:

هر عددی دوره تناوب باشد، ...

\* نتیجه ۲:

تعریف ریاضی:

\* نتیجه ۳:

قوانین اصلی انتقال، .....

ولی قوانین فرعی (قدر مطلق،

توان و ...) معمولاً .....

\* روش حل تست:

ساده:

سخت:

تبدیل به ساده }  
نمودار }  
تعریف ریاضی }



## (I) المانهای نمودار؟

(معروضه)

۲۰۰.  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  است. دوره‌ی تناوب چه تعداد از توابع زیر قطعاً برابر  $T$  است؟

- (الف)  $y = 3 - 2f(x + 1)$  (ب)  $y = 3f^2(x) + 1$  (ج)  $y = |f(x)|$  (د)  $y = f(3x - 1)$
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲۰۱. دوره تناوب تابع  $y = \sin(\frac{\pi x}{5})$  کدام است؟

- ۱۰ (۴)      ۵ (۳)       $\frac{5}{2}$  (۲)       $\frac{5}{4}$  (۱)

۲۰۲. نمودار تابع  $y = -2 \cos(m\pi x)$  پس از طی فاصله‌ای به اندازه  $\frac{1}{4}$ ، تکرار می‌شود. دوره تناوب تابع  $y = \frac{1}{4} \sin(\frac{x}{m})$  کدام است؟

(IQ کج)

- ۱۶π (۱)      ۸π (۲)      ۴π (۳)      ۲π (۴)



(نردبام فیلی سبز)

۲۰۳. ماکزیمم تابع  $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) - 1$  کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

۱ (۱)

۲۰۴. اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = |a| + b \cos a\pi x$  برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر ۳- باشد، بیشترین مقدار آن

(موج آزمون الگو)

کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{9}{2}$  (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۰۵. دوره تناوب یک تابع مثلثاتی  $\frac{4\pi}{3}$  و مجموع ماکزیمم و مینیمم آن ۲- است. ضابطه این تابع کدام است؟ (IQ کاج)

$y = -3 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - 1$  (۲)

$y = -2 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 1$  (۱)

$y = -3 \sin\left(\frac{3}{2}x\right) - 1$  (۴)

$y = -2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 1$  (۳)



(موج آزمون الگو)

۲۰۶. دامنه تابع  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$  کدام است؟

(۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

(۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$

(۴)  $\mathbb{Z}$

(۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

۲۰۷. طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع  $f(x) = \tan(3\pi - \frac{x}{4})$  یکنوا است، کدام مورد می‌باشد و تابع در آن بازه

(سنجش ۱۴۰۱)

چه وضعیتی دارد؟

(۴)  $2\pi$ ، صعودی

(۳)  $2\pi$ ، نزولی

(۲)  $\pi$ ، نزولی

(۱)  $\pi$ ، صعودی

(گزینه‌دو ۱۴۰۱)

۲۰۸. تابع  $y = \tan 3x$  روی بازه  $(0, a)$  اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

(۴)  $+\infty$

(۳)  $\frac{\pi}{6}$

(۲)  $\frac{3\pi}{2}$

(۱)  $\frac{\pi}{2}$

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

۲۰۹. تابع  $y = \sin 3x \sin(3x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $(\frac{\pi}{3}, a)$  اکیداً یکنواست. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2\pi}{3}$

(۳)  $\frac{7\pi}{12}$

(۲)  $\frac{5\pi}{12}$

(۱)  $\frac{\pi}{2}$



(علی سنج ۱۴۰۱)

۲۱۰. دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin 3x \cos 3x (\cos^2 3x - \sin^2 3x)$  چقدر است؟

$\frac{\pi}{4}$  (۴)

$\frac{\pi}{12}$  (۳)

$\frac{\pi}{3}$  (۲)

$\frac{\pi}{6}$  (۱)

زنگ باش!

۲۱۱. اگر  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  و  $g(x) = \cos x \cos 2x$  باشد، فاصله بین دو نقطه  $\max$  و  $\min$  متوالی

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

تابع  $h(x) = 4\pi f(x + \pi)g(x)$  چند برابر  $\frac{\pi}{4}$  است؟

$2\sqrt{5}$  (۴)

$\sqrt{17}$  (۳)

$\sqrt{15}$  (۲)

$\sqrt{13}$  (۱)

(مهورماه)

۲۱۲. دوره تناوب با ضابطه  $f(x) = \frac{\tan ax}{1 + \tan^2 ax}$  برابر  $\frac{3}{2}$  است.  $a$  کدام است؟

$\pi$  (۴)

$3\pi$  (۳)

$\frac{2\pi}{3}$  (۲)

$\frac{\pi}{3}$  (۱)



۲۱۳. چه تعداد از توابع زیر متناوب‌اند؟

(۱۰ گز)

$$y = [x] + [-x] \quad (د)$$

$$y = \frac{\sin x}{\sin x} \quad (ج)$$

$$y = \frac{x}{x} \quad (ب)$$

$$y = 1 \quad (الف)$$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

\* چه تعداد از این توابع، دوره تناوب اصلی دارند؟

نتیجه:

تابع ثابت ←

تابع ثابت با حفره‌های منظم ←

تابع ثابت با حفره‌های نامنظم ←

(موج آزمون الگو)

۲۱۴. دوره تناوب تابع  $f(x) = |\cos 4x|$  چقدر است؟

$\frac{\pi}{2}$  (۴)

$\frac{\pi}{4}$  (۳)

$\pi$  (۲)

$2\pi$  (۱)

(مهرماه)

۲۱۵. نمودار کدام تابع در فواصلی به طول ثابت تکرار می‌شود؟

هر سه مورد (۴)

$$y = \tan |x| \quad (۳)$$

$$y = \cos |x| \quad (۲)$$

$$y = \sin |x| \quad (۱)$$



۲۱۶.  $f(x)$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $T = 2$  است. اگر ضابطه‌ی تابع  $f$  در بازه‌ی  $[0, 2)$  به صورت  $f(x) = \sqrt{x}$  باشد، مقدار  $f(-5/51)$  کدام است؟

(تلم پی ۹۹)

۰/۸ (۴)

۰/۴۱ (۳)

۰/۷ (۲)

(۱) تعریف نمی‌شود

۲۱۷. تابع متناوب  $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$  را که دوره تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور

(تهری قارچ ۱۴۰۰)

به منحنی  $f$  و محور  $x$  ها در بازه  $[-0/75, 3/25]$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



۲۱۸. دوره تناوب تابع  $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$  کدام است؟

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2\pi \quad (۳)$$

$$\pi \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

(معروماه)

۲۱۹. دوره‌ی تناوب تابع  $f(x) = (-1)^{[x]} \cdot \cos \pi x$  کدام است؟

(۴) متناوب نیست.

$$4 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنیم دوره‌ی تناوب این تابع  $c$  باشد، طبق تعریف داریم:

$$f(x+c) = f(x) \quad 1$$

$$f(x) = (-1)^{[x]} \cos \pi x \Rightarrow f(x+c) = (-1)^{[x+c]} \cos(\pi(x+c))$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} f(x+c) = (-1)^{[x+c]} \cos(\pi x + \pi c) \quad 2$$

$$\xrightarrow{1 \text{ و } 2} (-1)^{[x+c]} \cos(\pi x + \pi c) = (-1)^{[x]} \cos \pi x$$

کمترین مقدار در گزینه‌های، عدد ۱ است. اگر به جای  $c$  عدد ۱ را جایگزین کنیم، داریم:

$$\underbrace{(-1)^{[x]} \cos(\pi x + \pi)}_{\text{طرف اول}} = \underbrace{(-1)^{[x]} \cos \pi x}_{\text{طرف دوم}}$$

حال طرف دیگر را ساده می‌کنیم:

$$3 \quad (-1)^{[x+1]} \xrightarrow{\text{عدد صحیح برود بیرون}} (-1)^{[x]+1} = (-1)^{[x]} \times (-1)^1 = -(-1)^{[x]}$$

$$\frac{\cos(\pi x + \pi)}{\text{ربع دوم}} \xrightarrow{\text{هم نوا و موافق کسینوس ربع دوم منفی}} -\cos \pi x$$

$$\Rightarrow (-1)^{[x+1]} \cos(\pi x + \pi) = -(-1)^{[x]} (-\cos \pi x) \Rightarrow (-1)^{[x]} \cos \pi x \quad 4$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید طرف دوم با طرف اول برابر شد، پس دوره‌ی تناوب این تابع  $T=1$  است.





(موج آزمون الگو)

۲۲۰. دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos 4x + \cos^2 2x$  کدام است؟



$\frac{\pi}{4}$  (۴)

$2\pi$  (۳)

$\pi$  (۲)

$\frac{\pi}{2}$  (۱)

(ریاضی فارغ ۹۸)

۲۲۱. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ ، کدام است؟

$\pi$  (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

**پاسخ:** گزینه ۱

**نکته ۱:** اگر بتوانیم ضابطه‌ی تابع  $f$  را به فرم جدیدی تبدیل کنیم که دوره تناوب کوچکتری داشته باشد، این دوره تناوب کوچکتر را به عنوان دوره تناوب اصلی تابع  $f$  انتخاب می‌کنیم.

**نکته ۲:** اگر عدد  $t$  یک دوره تناوب تابع  $f$  باشد و ما مطمئن نباشیم که آیا  $t$  دوره تناوب اصلی است یا نه؟، باید مقسوم علیه‌های  $t$  مانند  $\frac{t}{k}$  که  $k \in \mathbb{N}$  است را در رابطه‌ی  $f(x + \frac{t}{k}) = f(x)$  امتحان کنیم. کوچکترین  $\frac{t}{k}$  که در این رابطه صادق است، دوره تناوب اصلی می‌باشد.

مثلاً دوره تناوب اصلی توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  و  $T = 2\pi$  است.

دوره تناوب اصلی توابع  $y = |\sin x|$  و  $y = |\cos x|$  و  $T = \pi$  است.

در لحظه‌ی اول انتظار داریم که دوره تناوب اصلی تابع  $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$  نیز برابر  $T = \pi$  باشد، اما عدد  $\frac{\pi}{2}$

در رابطه‌ی  $f(x + \frac{\pi}{2})$  صادق است. ببینید:

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| + |\cos(x + \frac{\pi}{2})| = |\cos x| + |-\sin x| = f(x)$$

در این تست  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$  است. دوره تناوب اصلی هر یک از توابع  $\tan(\pi x)$  و  $\cot(\pi x)$

برابر  $T = \frac{\pi}{\pi} = 1$  است. در لحظه‌ی اول به نظر می‌رسد که دوره تناوب اصلی تابع  $f$  هم برابر  $T = 1$  باشد اما با

استفاده از فرمول مثلثاتی  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، ضابطه‌ی تابع  $f$  به صورت  $f(x) = -2 \cot(2\pi x)$  است که دوره

تناوب اصلی آن  $T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$  است. از آنجا که  $\frac{1}{2}$  کوچکتر است، آن را به عنوان دوره تناوب اصلی انتخاب

می‌کنیم.



(معمومه)

۲۲۲. نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sin 2x - \frac{1}{2} \tan 2x$  در بازه‌هایی با کدام فاصله تکرار می‌شود؟

 $\pi$  (۴) $\frac{\pi}{2}$  (۳) $2\pi$  (۲) $\frac{\pi}{4}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴

**راهبرد:** اگر  $f$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $T_1$  و  $g$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $T_2$  باشد، تابع‌های  $f + g$  و  $f - g$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $T = [T_1, T_2]$  خواهند بود. یعنی دوره‌ی تناوب توابع  $f \pm g$ ، ک.م.م  $T_1$  و  $T_2$  است.

در اینجا:

$$f(x) = \sin 2x - \frac{1}{2} \tan 2x \Rightarrow T = [\pi, \frac{\pi}{2}] = \pi$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi & & T_2 = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

کمی اضافه‌تر: برای یافتن ک.م.م بین دو کسر، ابتدا مخرج دو کسر را یکی کرده، سپس بین صورت کسرهای جدید، ک.م.م می‌گیریم. مثلاً ک.م.م  $T_1 = \pi$  و  $T_2 = \frac{\pi}{2}$  به این صورت محاسبه می‌شود:

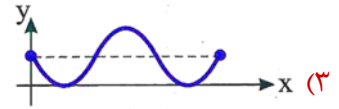
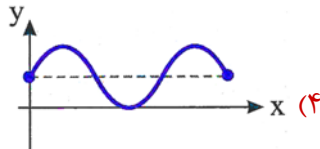
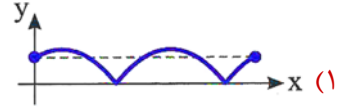
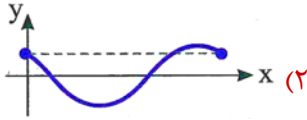
$$\left. \begin{matrix} T_1 = \frac{\pi \times 2}{2} = \frac{2\pi}{2} \\ T_2 = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow T = \frac{[\pi, 2\pi]}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



(II) نمودار؟

(موج آزمون الگو)

۲۲۳. نمودار تابع  $f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$  روی بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟



۲۲۴. نمودار تابع  $y = 2 \sin x$  در فاصله  $(-\pi, 7\pi)$  چند ماکسیمم دارد؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

(تجربی ۹۱)

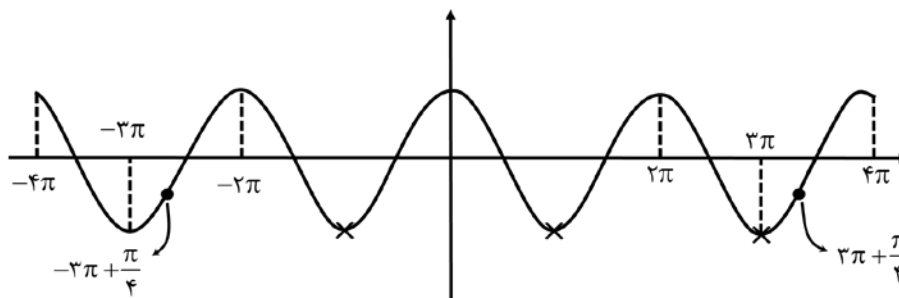
۲۲۵. نمودار تابع  $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$  روی بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq 3\pi x \leq 3\pi \Rightarrow 3\pi \geq -3\pi x \geq -3\pi$$

$$\Rightarrow 3\pi + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \geq -3\pi + \frac{\pi}{4}$$

ترفند





۲۲۶. نمودار تابع  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$  در بازه  $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  در چند نقطه محور X ها را قطع می کند؟ (تجربی فارغ ۹۱)

۵ (۴)

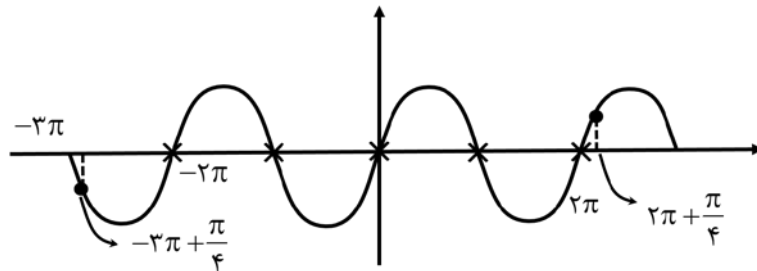
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2x \leq 3\pi \Rightarrow 2\pi \geq -2x \geq -3\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - 2x \geq -3\pi + \frac{\pi}{4}$$



(موج آزمون الگو)

۲۲۷. برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = -\tan\left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$  و دامنه  $[0, 2]$  کدام است؟



$$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \quad (۴)$$

$$\left[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad (۳)$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right] \quad (۲)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right] \quad (۱)$$



### (III) نمودار ✓ پارامتر؟

$$a \sin (cx + d) + b$$

$$(\cos)$$

**c و d : محور x ها**

c ← توجه به دوره تناوب (طاق یا نیم طاق) ← معکوس  
d ← نقطه دلخواه

**a و b : محور y ها**

a : نصف فاصله (آدمیزادی یا غیر آدمیزادی؟)  
\* هم max و هم min معلوم:  
b : وسط

\* یکی از max و min معلوم:  
سعی می کنیم خودمون اون یکی رو دست بیاریم.  
توجه به max یا min ← مستقیم

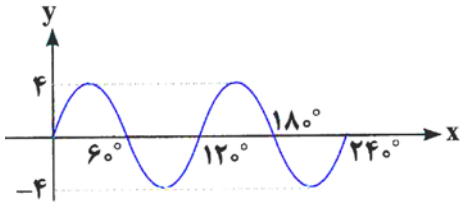
**تذکر**

\* برای a و c توجه کثافت کاری فراموش نشود!



(۱۰ گج)

۲۲۸. معادله مربوط به نمودار مقابل کدام است؟



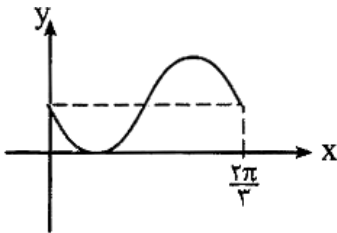
(۱)  $y = -4 \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

(۲)  $y = 4 \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

(۳)  $y = -4 \sin(-3x)$

(۴)  $y = 4 \sin(-3x)$

۲۲۹. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار  $y = 1 - \sin(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟ (ریاضی فارغ ۹۶)



(۱) صفر

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

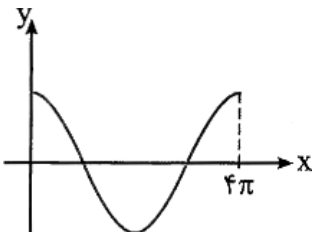
(۴) ۲

\* اگر  $y = 1 + \sin(mx)$  بود چی؟

۲۳۰. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{16\pi}{3}$ ،

(ریاضی ۹۶)

کدام است؟



(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) صفر

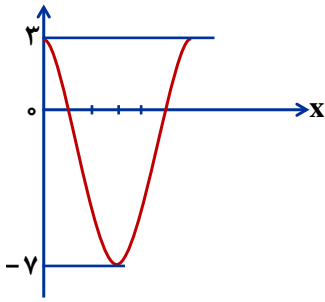


\*  $m = ?$



(ریاضی فارج ۱۴۰۱)

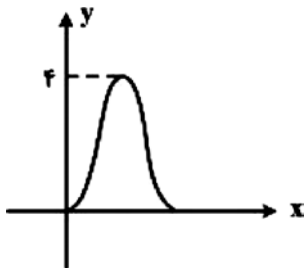
۲۳۱. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos x + b$  را نشان می‌دهد، مقدار  $f(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{11}{2}$
- (۳)  $-\frac{1}{2}$
- (۴)  $-\frac{11}{2}$

(ریاضی ۹۷)

۲۳۲. شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$  در بازه  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟

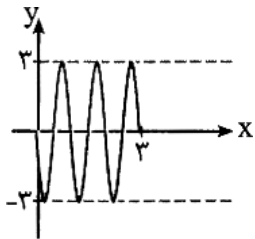


- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

خطرا!

(ریاضی فارج ۹۲)

۲۳۳. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a.b$  کدام است؟



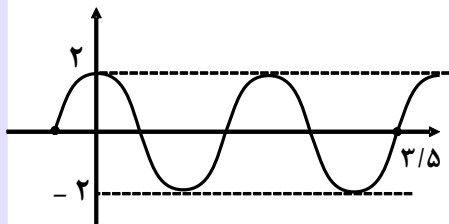
- (۱) -۶
- (۲) -۳
- (۳) ۴/۵
- (۴) ۶

خطرا!

خطرا!

(ریاضی ۹۲)

۲۳۴. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin \pi(\frac{1}{5} + bx)$  است.  $ab$  کدام است؟



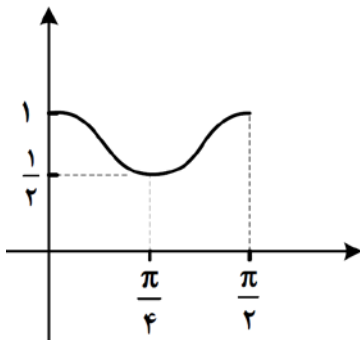
- (۱) ۲/۵
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

$$y = a \sin \pi(\frac{1}{5} + bx) = a \sin(\frac{\pi}{5} + \pi bx) = a \cos \pi bx$$

خطرا!



(تجربی میگرد ۱۴۰)

۲۳۵. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = c + a \cos bx$  را نشان می‌دهد. مقدار  $bc$  کدام است؟

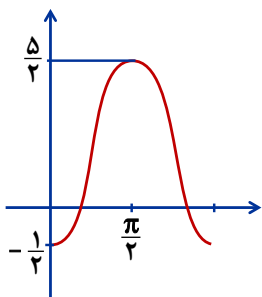
(۱) -۳

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۳

(تجربی خارج ۱۴۰)

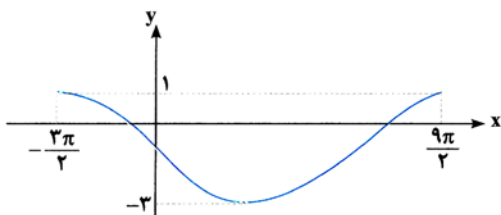
۲۳۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = c + a \cos bx$  را نشان می‌دهد، مقدار  $ac$  کدام است؟

(۱) -۵

(۲) -۳

(۳)  $-\frac{5}{2}$ (۴)  $-\frac{3}{2}$ 

خطرا!

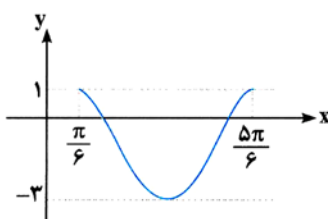
۲۳۷. شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت  $\frac{a}{b}$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

۲۳۸. شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه تناوب است. مقادیر  $b$  و  $c$ ، کدام‌اند؟ (تجربی خارج ۹۹)(۱)  $b = 3, c = -1$ (۲)  $b = 3, c = -2$ (۳)  $b = \frac{3}{2}, c = -2$ (۴)  $b = \frac{3}{2}, c = -1$ 

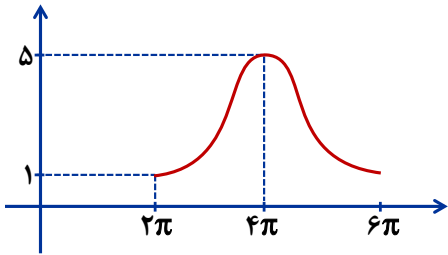
ترفند





(تجربی ۱۴۰۱)

۲۳۹. شکل زیر، نمودار تابع  $y = c + a \cos bx$  را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار  $c$  کدام است؟



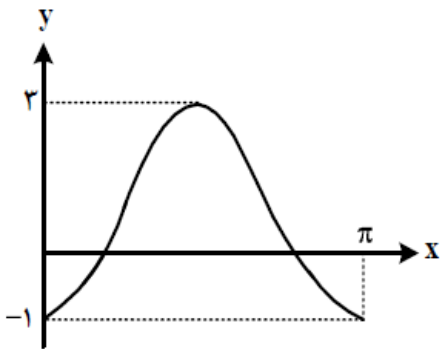
- ۵ (۱)
- ۴ (۲)
- ۳ (۳)
- ۱ (۴)



۲۴۰. اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + b \sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4})$  باشد، اختلاف صفرهای

(ریاضی ۱۴۰۲)

تابع  $f$  در بازه  $[0, \pi]$ ، کدام است؟



- $\frac{\pi}{6}$  (۱)
- $\frac{\pi}{4}$  (۲)
- $\frac{\pi}{2}$  (۳)
- $\frac{2\pi}{3}$  (۴)

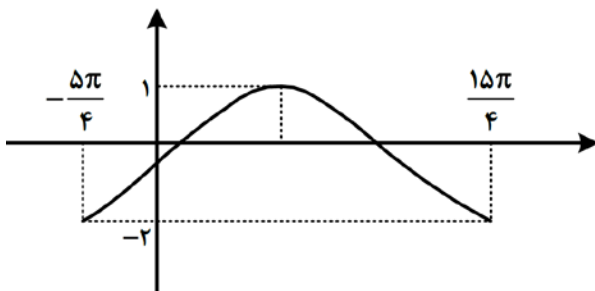
ترفند

\*  $a + b(\cos^2(cx - \frac{3\pi}{4}) \sin^2(cx - \frac{3\pi}{4}))$  چی؟

۲۴۱. شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin^2(\frac{\pi}{4} - bx) + c$  در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار  $ab$  کدام

(تجربی فارج ۱۴۰۲)

است؟



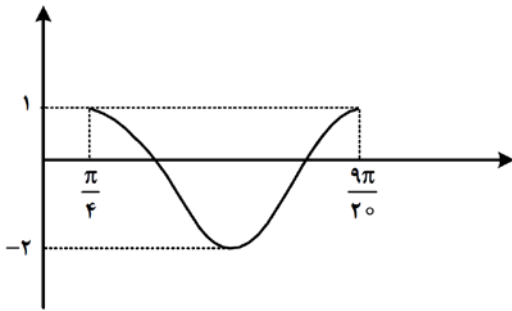
- ۰/۳ (۱)
- ۰/۳ (۲)
- ۰/۶ (۳)
- ۰/۶ (۴)

ترفند



۲۴۲. شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$  در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار  $ab$

(تجربی ۱۴۰۲)



کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) -۱۵

(۳) ۷/۵

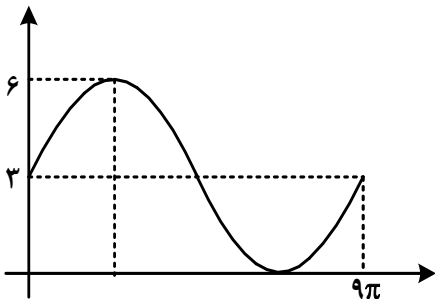
(۴) -۷/۵

ترفند



۲۴۳. اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)}$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(ریاضی خارج ۱۴۰۲)



کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۴/۷۵

(۴) ۵

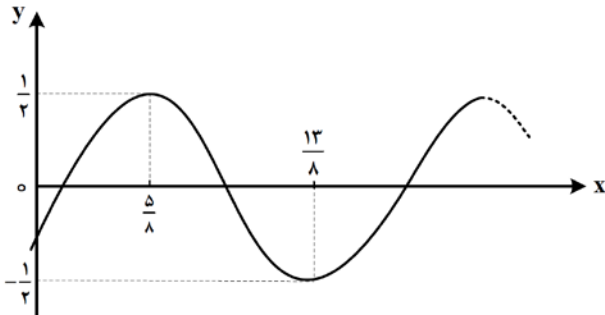
ترفند



۲۴۴. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin(bx - c)$  را نشان می‌دهد. اگر  $a > 0$ ،  $b > 0$  و  $0 < c < 2\pi$  باشند،

(ریاضی میسر ۱۴۰۱)

مقدار  $\frac{ab}{c}$  کدام است؟



(۱) ۴

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{\pi}$

(۴)  $2\pi$

خطرا!

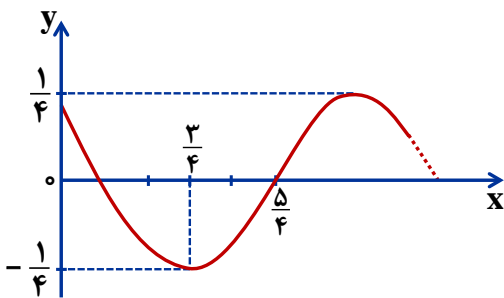
ترفند

خطرا!

۲۴۵. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos(bx + c)$  را نشان می‌دهد، اگر  $b > 0$  و  $0 < c < \pi$  باشد،

(ریاضی ۱۴۰۱)

مقدار  $\frac{ac}{b}$  کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{16}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{1}{4\pi}$

(۴)  $\pi$

خطرا!

ترفند

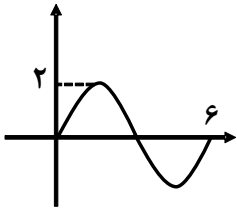
خطرا!





(تجربی فارغ ۹۳)

۲۴۶. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است  $a + b$  کدام است؟

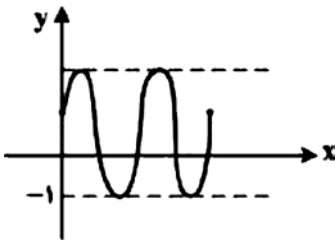


- (۱)  $\frac{4}{3}$
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳)  $\frac{7}{2}$
- (۴)  $\frac{8}{3}$

تلفند

(ریاضی فارغ ۹۷)

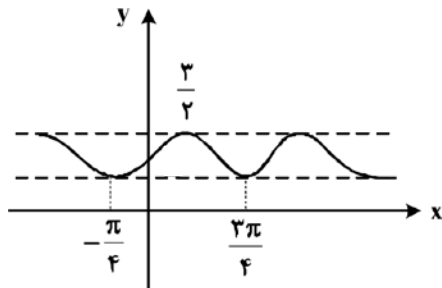
۲۴۷. شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ ، در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

(ریاضی ۹۸)

۲۴۸. شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟

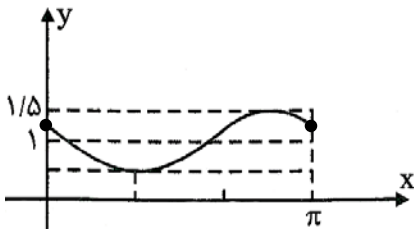


$$y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

(ریاضی فارغ ۹۵)

۲۴۹. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

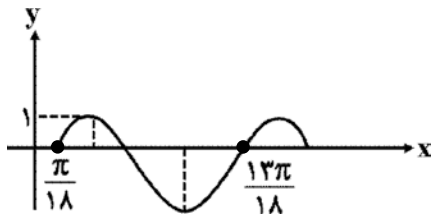


- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴) ۲

خطر!



۲۵۰. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$  است، کدام  $a + b$  است؟ (ریاضی ۹۵)



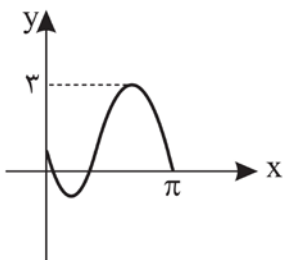
- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴) ۲

$$y = a - 2 \cos(\frac{\pi}{2} + bx) = a - 2(-\sin bx) = a + 2 \sin bx$$

ترفند

خطرا

۲۵۱. قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + 2 \sin bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $a - b$  کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۱)



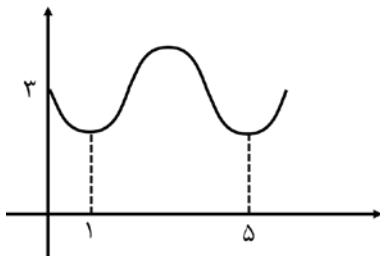
- (۱)  $-\frac{5}{6}$
- (۲)  $\frac{11}{6}$
- (۳)  $-\frac{7}{6}$
- (۴)  $\frac{19}{6}$

خطرا

ترفند

خطرا

۲۵۲. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است، مقدار  $y$  در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟ (تجربی ۹۳)



- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

خطرا

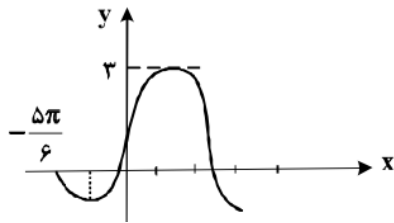
$$y = a + \sin(b \pi x) \rightarrow 3 + \sin(-\frac{25\pi}{6}) = 3 - \sin(\frac{25\pi}{6}) = 3 - \sin(\frac{2\pi}{6}) = 2/5$$





۲۵۳. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$

(تجربی فارغ ۹۸)

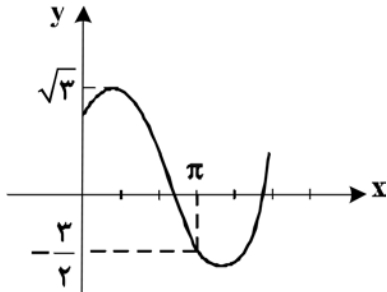


$$y = a + b \sin x$$

کدام است؟

- (۱)  $1/5$   
 (۲)  $2$   
 (۳)  $2/5$   
 (۴)  $1 + \sqrt{3}$

۲۵۴. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  است.  $b$  کدام است؟ (تجربی ۹۸)



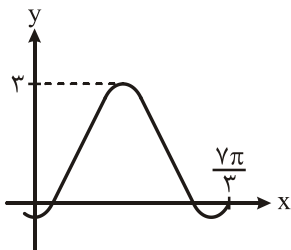
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳)  $\sqrt{3}$   
 (۴)  $2$

**خطرا!**





۲۵۵. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$  است. مقدار  $b$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



$y = a + b \cos x$

(۱) ۲

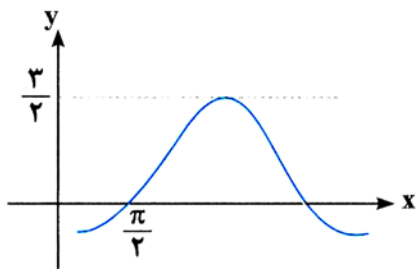
(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

خطرا!

۲۵۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است. مقدار  $a$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)



(۱) -۱

(۲) -1/2

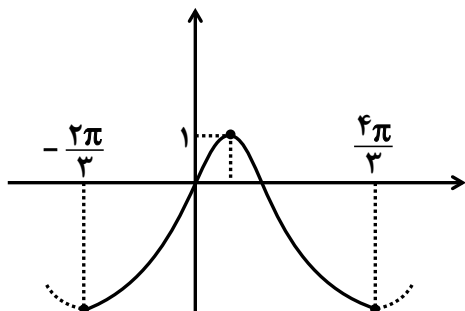
(۳) 1/2

(۴) ۱

خطرا!

خطرا!

۲۵۷. شکل زیر، قسمتی از نمودار  $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$  را نشان می‌دهد. مقدار  $b(c - a)$  کدام است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

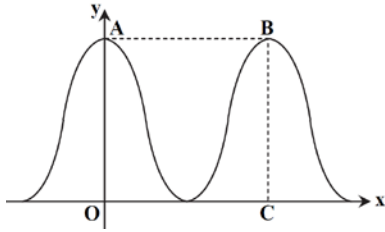
خطرا!

\* به تست‌های ۲۵۴ و ۲۵۶ مراجعه کنید.



۲۵۸. در شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b$  رسم شده است. اگر چهارضلعی ABCO یک مربع باشد،

(گزینه‌رو ۱۴۰۱)

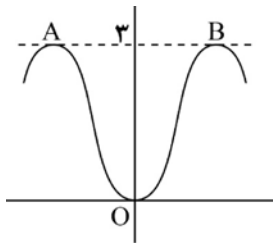


مقدار  $a \times b$  کدام است؟

- (۱) ۱۶
- (۲) -۱۶
- (۳) -۴
- (۴) ۴

۲۵۹. بخشی از نمودار  $f(x) = a - b \cos\frac{\pi}{4}x$  به صورت زیر می‌باشد. مساحت مثلثی که سه نقطه A، O و B ایجاد

(علی سنج ۱۴۰۱)



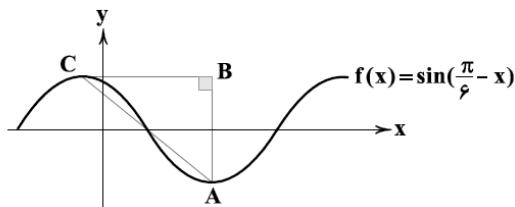
می‌کنند، چقدر است؟

- (۱) ۴
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳) ۳
- (۴) ۶

\* a و b ؟

۲۶۰. نمودار زیر بخشی از نمودار تابع  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$  است، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

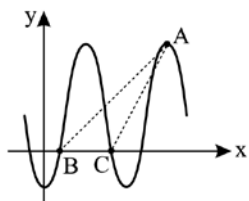
(کاج ۱۴۰۱)



- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $2\pi$
- (۴)  $\frac{\pi}{3}$

۲۶۱. نمودار تابع  $f(x) = -2 \cos x + 1$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. مساحت مثلث ABC

(مدارس برتر ۱۴۰۱)



کدام است؟

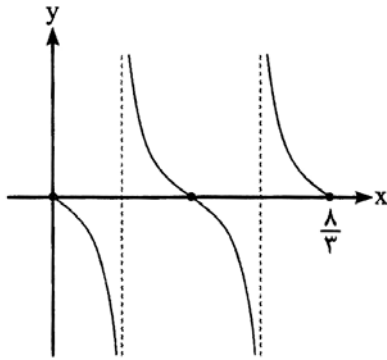
- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$
- (۲)  $2\pi$
- (۳)  $3\pi$
- (۴)  $\frac{3\pi}{2}$





(مهرماه)

۲۶۲. شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = a \tan(b\pi x)$  است. کدام گزینه‌ی زیر درست است؟



(۱)  $a \in \mathbb{R}, b = \pm \frac{2}{3}$

(۲)  $a > 0, b = \frac{2}{3}$

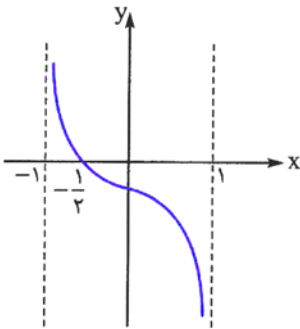
(۳)  $a < 0, b = -\frac{2}{3}$

(۴)  $a < 0, b = \frac{2}{3}$

**خطر!**

(نردبان ۳ فیل سبز)

۲۶۳. اگر قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \tan bx$  به صورت روبه‌رو باشد، کدام  $ab$  است؟



(۱)  $-\frac{\pi}{4}$

(۲)  $\frac{\pi}{4}$

(۳)  $-\frac{\pi}{2}$

(۴)  $\frac{\pi}{2}$

**خطر!**

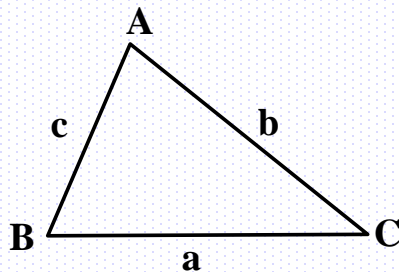


## حل مثلث

❖ مثلث قائم الزاویه ← تعریف نسبت‌های مثلثاتی

❖ مثلث غیر قائم الزاویه ←

① قضیه sin ها:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

یک ضلع و زاویه روبه‌رو داری

\* نتیجه:

② مساحت:

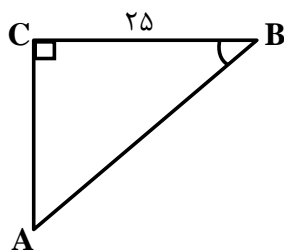
$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$

دو ضلع داری

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

سه ضلع داری

۲۶۴. برای اندازه‌گیری پهنای رودخانه (AC) در شکل روبه‌رو، از نقطه C، ۲۵<sup>m</sup> دور شده‌ایم. اگر  $\hat{CBA} = 37^\circ$ ،



پهنای رودخانه چند متر است؟ ( $\tan 37^\circ = \frac{3}{4}$ )

۳۳ (۱)

۲۴ (۲)

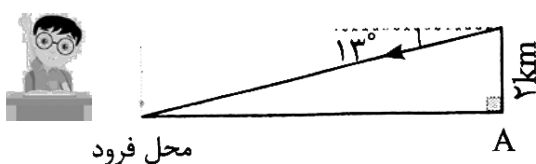
۱۸ / ۷۵ (۳)

۱۶ / ۲۵ (۴)

۲۶۵. در شکل مقابل، زاویه‌ی امتداد مسیر حرکت هواپیما با خط افق  $13^\circ$  است. محل فرود هواپیما تا نقطه‌ی A، چند کیلومتر

(کتاب درسی)

فاصله دارد؟ ( $\tan 13^\circ = 0.23$ )



محل فرود

۸ / ۲ (۱)

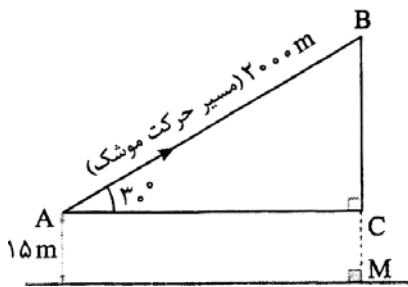
۸ / ۵ (۲)

۸ / ۷ (۳)

۸ / ۹ (۴)



۲۶۶. یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $30^\circ$  مطابق شکل از نقطه  $A$  پرتاب می‌شود. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همان زاویه در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟  
(کتاب درسی)



(۱) ۱۰۰۰

(۲) ۱۰۱۵

(۳) ۱۱۵۰

(۴) ۱۰۲۵

توجه!

۲۶۷. یک زیر دریایی در عمق ۲ کیلومتری با زاویه  $30^\circ$  نسبت به افق به سمت سطح آب حرکت می‌کند. اگر سرعت این زیر دریایی ۵۰ متر بر ثانیه باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا به سطح آب برسد؟  
(IQ گاج)

(۴) ۸۰

(۳) ۶۰

(۲) ۴۰

(۱) ۲۰

توجه!

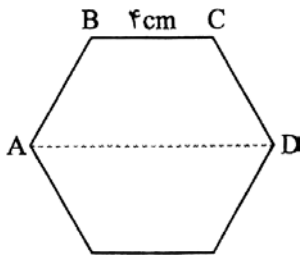
۲۶۸. در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{C} = 90^\circ$ )،  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $AB = 10$  است. طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث  $ABC$  چقدر است؟

(۴)  $5\sqrt{2}$ (۳)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۲)  $5\sqrt{3}$ (۱)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 

توجه!



۲۶۹. مساحت ذوزنقه‌ی شکل روبه‌رو با توجه به طول ضلع شش ضلعی منتظم ( $BC = 4\text{cm}$ ) کدام است؟ (مهرماه)



(۱)  $24\sqrt{3}\text{cm}^2$

(۲)  $8\sqrt{3}\text{cm}^2$

(۳)  $6\sqrt{3}\text{cm}^2$

(۴)  $12\sqrt{3}\text{cm}^2$

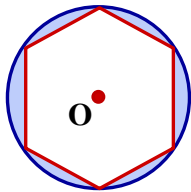
یادآوری ۶ ضلعی منتظم:



۲۷۰. با توجه به شش ضلعی منتظم مقابل، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟ (می‌دانیم طول قطر بزرگ شش ضلعی

منتظم ۴ است.) (IQ گج)

منتظم ۴ است.)



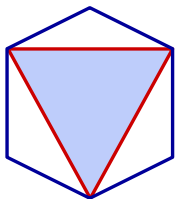
(۱)  $2\pi - 3\sqrt{3}$

(۲)  $2\pi + 3\sqrt{3}$

(۳)  $4\pi + 6\sqrt{3}$

(۴)  $4\pi - 6\sqrt{3}$

۲۷۱. در شش ضلعی منتظم مقابل، اگر مساحت ناحیه رنگی  $48\sqrt{3}$  باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟ (IQ گج)



(۱)  $56\sqrt{3}$

(۲)  $84\sqrt{3}$

(۳)  $96\sqrt{3}$

(۴)  $108\sqrt{3}$



۲۷۲. در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، حاصل عبارت  $\frac{\cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{B}}$  کدام است؟ (معروضه)

- (۱)  $\tan \hat{B}$       (۲)  $\cot \hat{B}$       (۳)  $\frac{1}{2} \tan \hat{B}$       (۴)  $\frac{1}{2} \cot \hat{B}$

پاسخ: گزینه ۳

در هر مثلث قائم الزاویه با رأس  $\hat{A} = 90^\circ$  داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \cos \hat{C} \quad *$$

حالا حاصل عبارت داده شده را می یابیم:

$$\frac{\cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{B}} = \frac{\sin^2 \hat{B}}{\sin^2 \hat{B} \cos^2 \hat{B}} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos^2 \hat{B}} = \frac{\tan \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{1}{\cos \hat{B}} \tan \hat{B}$$

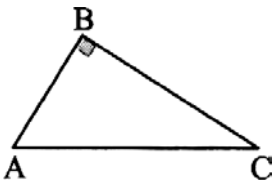
۲۷۳. در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) با مساحت  $S$ ، حاصل عبارت  $\frac{S}{AC^2}$  معادل کدام گزینه است؟ (معروضه)

- (۱)  $\sin^2 \hat{A}$       (۲)  $2 \sin^2 \hat{A}$       (۳)  $\frac{1}{2} \sin^2 \hat{A}$       (۴)  $\frac{1}{4} \sin^2 \hat{A}$

پاسخ: گزینه ۴

شکل روبه رو را در نظر بگیرید:

با توجه به شکل:



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \xrightarrow[\frac{S}{AC^2}=?]{\text{خواسته‌ی تست}} \frac{S}{AC^2} = \frac{\frac{1}{2} AB \times BC}{AC^2} = \frac{\frac{1}{2} AB \times BC}{AC \times AC} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{AC}\right) \left(\frac{BC}{AC}\right) \quad *$$

اما در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  داریم:

$$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} \\ \cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در } *} \frac{S}{AC^2} = \frac{1}{2} \sin \hat{C} \cos \hat{C}$$

$$\xrightarrow{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{S}{AC^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \sin 2\hat{C}\right) = \frac{1}{4} \sin 2\hat{C}$$

از طرفی:

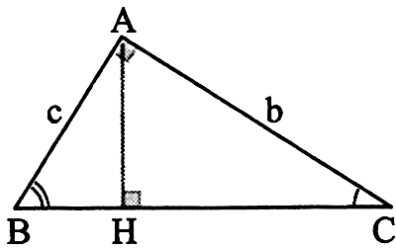
$$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \hat{A}$$

$$\frac{S}{AC^2} = \frac{1}{4} \sin(2(90^\circ - \hat{A})) = \frac{1}{4} \sin(180^\circ - 2\hat{A}) = \frac{1}{4} \sin 2\hat{A}$$



(معمومه)

۲۷۴. در مثلث قائم‌الزاویه شکل روبه‌رو، حاصل عبارت  $bc \sin \hat{C}$  کدام است؟



(۱)  $AH^2$

(۲)  $2AH^2$

(۳)  $AH$

(۴)  $2AH$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا فرمول  $\sin \hat{C}$  را باز می‌کنیم، سپس از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه کمک می‌گیریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{b}$$

بنابراین:

$$bc \sin \hat{C} = \frac{bc \cdot AH}{b} = c \cdot AH$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{C} = \sin \hat{B}$$

$$\frac{AH}{AB} = \sin \hat{B} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \sin \hat{B}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه AHC و AHB مقادیر  $\sin \hat{C}$  و  $\sin \hat{B}$  را می‌یابیم:

$$\frac{AH}{AB} = \sin \hat{B} = \frac{AH}{c}$$

$$\frac{AH}{AC} = \sin \hat{C} = \frac{AH}{b}$$

$$\frac{bc \cdot AH}{b} = (bc) \left( \frac{AH}{c} \right) \left( \frac{AH}{b} \right) = 2AH^2$$



۲۷۵. اضلاع مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) یک دنباله حسابی می‌سازند. مقدار  $\sin \hat{B} \times \sin \hat{C}$  کدام است؟

(۱Q گزین)

۰ / ۵۲ (۴)

۰ / ۴۸ (۳)

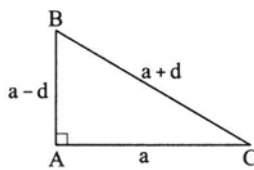
۰ / ۲۶ (۲)

۰ / ۲۴ (۱)

\* زوایا دنباله حسابی؟

پاسخ: گزینه ۳

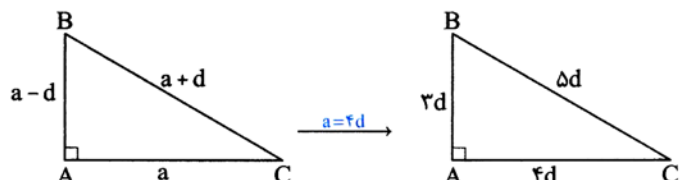
با توجه به اینکه اضلاع مثلث، دنباله حسابی می‌سازند، مثلثی به صورت زیر در نظر می‌گیریم و با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (a+d)^2 = (a)^2 + (a-d)^2 \Rightarrow \cancel{a^2} + 2ad + \cancel{a^2} = \cancel{a^2} + a^2 - 2ad + \cancel{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4ad \Rightarrow a^2 - 4ad = 0 \Rightarrow a(a - 4d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = 4d \checkmark \end{cases}$$

پس نتیجه اضلاع مثلث  $ABC$  به صورت زیر است که برای محاسبه  $\sin \hat{C}$  و  $\sin \hat{B}$  می‌توان نوشت:



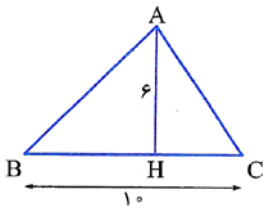
$$\sin \hat{B} = \frac{4d}{5d} = \frac{4}{5}, \quad \sin \hat{C} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$$

در نهایت خواسته مسئله برابر است با:

$$\sin \hat{B} \times \sin \hat{C} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = 0 / 48$$



(قلم‌پی ۱۴۰۰)

۲۷۶. در شکل مقابل، اگر  $3 \tan \hat{B} = 2 \tan \hat{C}$  باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟

(۱)  $6\sqrt{2}$

(۲)  $5\sqrt{2}$

(۳)  $7\sqrt{2}$

(۴)  $4\sqrt{2}$

۲۷۷. ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه روئیت انتها و

(ریاضی فارغ ۹۴) ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و  $40^\circ$  است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ( $\tan 40^\circ = 0.8$ )

(۴)  $7/2$

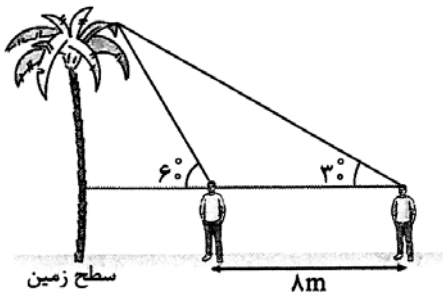
(۳) ۷

(۲)  $6/4$

(۱) ۶

۲۷۸. دو شخص با قد یکسان  $1/8$  متر به فاصله‌ی ۸ متری از یکدیگر در مقابل درختی قرار دارند. اگر ایندو نفر نقطه‌ی بالایی درخت را مطابق شکل با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  مشاهده کنند، ارتفاع درخت تقریباً

(معروماه)

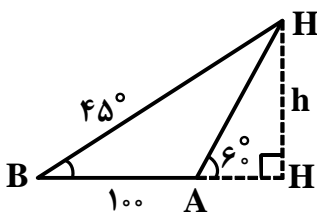
چند متر است؟ ( $\sqrt{3} \approx 1.7$ )

(۱)  $7/6$

(۲)  $9/6$

(۳)  $8/6$

(۴)  $10/6$

۲۷۹. شخصی نزدیک یک آنتن رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آنتن  $60^\circ$  است. اگر او  $100\text{m}$  به عقببرود، زاویه‌ی دید که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد،  $45^\circ$  است. ارتفاع آنتن تقریباً چقدر است؟

(۱) ۲۳۸

(۲) ۲۸۳

(۳) ۳۲۸

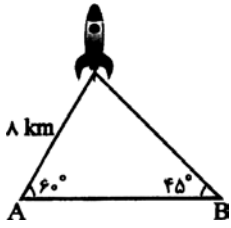
(۴) ۳۸۲







۲۸۰. از پرتاب یک موشک دو خبرنگار عکس گرفته‌اند. فاصله خبرنگار B تا موشک چه قدر است؟



(۱)  $8\sqrt{3}$  کیلومتر

(۲)  $4\sqrt{6}$  کیلومتر

(۳)  $8\sqrt{2}$  کیلومتر

(۴)  $4\sqrt{3}$  کیلومتر

\* فاصله دو خبرنگار از هم؟

۲۸۱. دو تیرانداز (۱) و (۲) به ترتیب با زوایای  $45^\circ$  و  $30^\circ$  نسبت به سطح زمین، به هدف مشخص شده در نقطه A

(IQ کج)

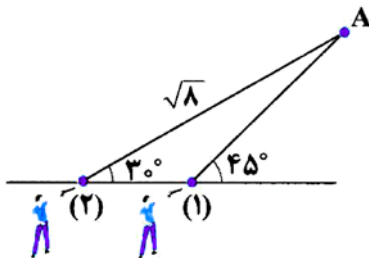
شلیک می‌کنند. فاصله تیرانداز (۱) تا هدف کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{2}$

(۲)  $4\sqrt{2}$

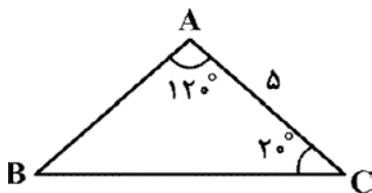
(۳) ۲

(۴) ۴



\* فاصله دو تیرانداز از هم؟

۲۸۲. طول کوچک‌ترین ضلع مثلث مقابل کدامست؟



(۲)  $\frac{5}{2 \cos 20^\circ}$

(۴)  $\frac{5}{2 \sin 40^\circ}$

(۱)  $\frac{5}{\cos 40^\circ}$

(۳)  $\frac{5}{\sin 40^\circ}$

طبق قانون sin ها، کوچک‌ترین ضلع باید روبه‌رو کوچک‌ترین زاویه باشد.

$$\frac{5}{\sin 40^\circ} = \frac{AB}{\sin 20^\circ} \Rightarrow AB = \frac{5}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

(ریاضی فارغ ۹۳)

۲۸۳. در مثلث ABC،  $BC = 3 + \sqrt{3}$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه AC کدام است؟

(۴)  $3\sqrt{2}$

(۳)  $2\sqrt{3}$

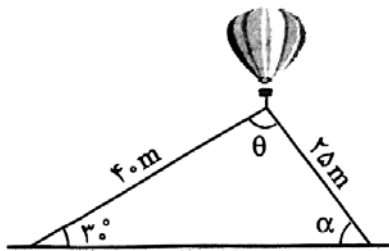
(۲) ۴

(۱) ۳



۲۸۴. یک بالن تبلیغاتی مطابق شکل به وسیله دو طناب به طول‌های ۲۵ و ۴۰ متر به زمین متصل است. زاویه بین

دو طناب چند درجه است؟



(۱)  $53^\circ$

(۲)  $97^\circ$

(۳)  $53^\circ$  یا  $127^\circ$

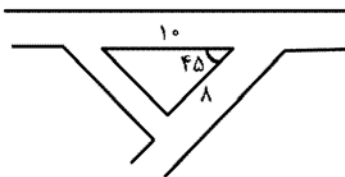
(۴)  $97^\circ$  یا  $23^\circ$



خطرا!

خطرا!

۲۸۵. محل تقاطع سه جاده، قطعه زمینی مثلثی مطابق شکل زیر ایجاد می‌کند. مساحت آن کدام است؟



(۱)  $15\sqrt{2}$

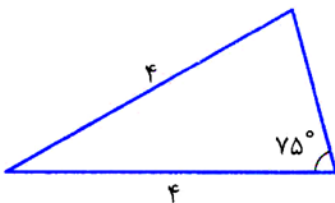
(۲)  $10\sqrt{3}$

(۳)  $15\sqrt{3}$

(۴)  $20\sqrt{2}$

(نردباز ۳ فیلی سبز)

۲۸۶. مساحت مثلث شکل مقابل کدام است؟



(۱)  $4\sqrt{3}$

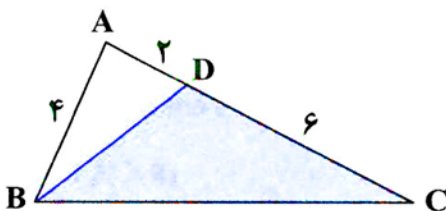
(۲)  $8\sqrt{3}$

(۳) ۴

(۴) ۸

(IQ کاج)

۲۸۷. در مثلث مقابل، مساحت ناحیه رنگی چند درصد از مساحت کل است؟



(۱)  $0/75$

(۲)  $0/65$

(۳) ۷۵

(۴) ۶۵

خطرا!



۲۸۸. مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن گاه چند

مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



(۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

(۳) بی‌شمار

(۲) ۲

(۱) ۱



۲۸۹. مثلث ABC، با اضلاع  $\sqrt{3}$  و ۶ و  $\alpha$  (زاویه بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث  $4/5$  باشد، بیشترین

مقدار  $\alpha$  چند برابر کمترین مقدار  $\alpha$  است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۲۹۰. در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر  $\alpha$  است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف

بیشترین و کمترین مقدار  $\alpha$  کدام است؟

(ریاضی فارغ ۱۴۰۲)



(۴)  $\frac{\pi}{4}$

(۳)  $\frac{\pi}{2}$

(۲)  $\frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{2\pi}{3}$

۲۹۱. مساحت مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۴ و  $8\sqrt{2}$  واحد، برابر ۵۶ است. اندازه کوچک‌ترین زاویه مثلث چند

درجه است؟

(تلم‌پی ۱۴۰۰)

(۴) ۱۵

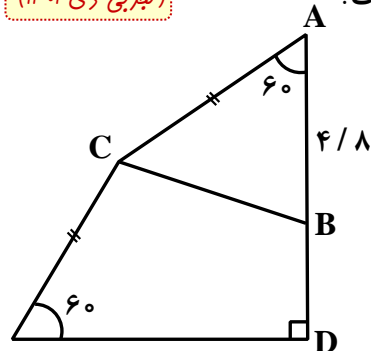
(۳) ۳۰

(۲) ۶۰

(۱) ۴۵

۲۹۲. در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر  $7/2\sqrt{3}$  است. فاصله D از C کدام است؟

(تبری دی ۱۴۰۱)



(۱)  $6\sqrt{6}$

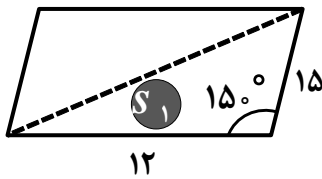
(۲)  $3\sqrt{6}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{2}$



۲۹۳. اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع دارای اندازه‌های ۱۲ و ۱۵ است، اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن  $15^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



$$S_1 = \frac{1}{2} \times 15 \times 12 \times \sin 15^\circ = 45$$

$$\Rightarrow S = 2S_1 = 2(45) = 90$$

۳۰ (۱)

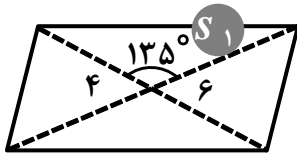
۰۴۵ (۲)

۶۰ (۳)

۹۰ (۴)

۲۹۴. در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه‌ی بین آن‌ها  $135^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

(تجربی ۹۲) (مشابه تجربی قاج ۹۶)



$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 135^\circ = 6\sqrt{2} \xrightarrow{\times 4} 24\sqrt{2}$$

۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۳۶ (۴)

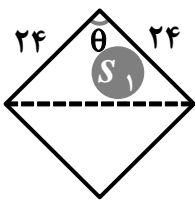
۲۹۵. طول اضلاع یک لوزی ۲۴ و کسینوس بزرگ‌ترین زاویه آن  $\frac{-\sqrt{5}}{3}$  است. مساحت این مثلث چند است؟ (سنجش ۹۰)

۳۲۴ (۴)

۱۹۸ (۳)

۳۸۴ (۲)

۱۹۲ (۱)



$$S_1 = \frac{1}{2} \times 24 \times 24 \times \underbrace{\sin \theta}_{\downarrow} = 24 \times 8 \xrightarrow{\times 2} 48 \times 8 = 384$$

(ریاضی ۹۳) (مشابه تجربی قاج ۹۷)

۲۹۶. مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ کدام است؟

۱۴√۵ (۴)

۱۲√۵ (۳)

۱۴√۳ (۲)

۱۵√۲ (۱)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} = 14\sqrt{5}$$

↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓  
۱۴   ۱۴   ۷   ۱۴   ۹   ۱۴   ۱۲



## معادله مثلثاتی

k دار

مجموعه جواب‌های کلی (عمومی) معادله مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط  $x \neq k\pi$ ، کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

بی k

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ ، در فاصله  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

6 (4)

5 (3)

3 (2)

1 (1)

خاص

فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در بازه  $[0, \pi]$  باشد، ماکزیمم عضو مجموعه A، کدام است؟

$$\frac{8}{9}\pi \quad (4)$$

$$\frac{7}{9}\pi \quad (3)$$

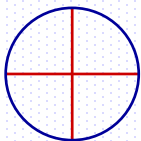
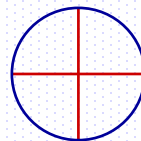
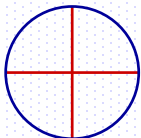
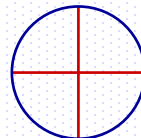
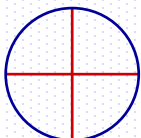
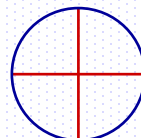
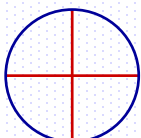
$$\frac{6}{7}\pi \quad (2)$$

$$\frac{5}{7}\pi \quad (1)$$

(I) k دار

نمایش گزینه‌ها روی دایره‌ی مثلثاتی و ...

\* مثال:

 $k\pi$ : $k\pi + \frac{\pi}{2}$ : $2k\pi$ : $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ : $\frac{k\pi}{2}$ : $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ : $\frac{k\pi}{4}$ :

\* ساده کردن

\* عنایت به دامنه!

\* اگر سخت بود ← به k عدد بده / بر حسب درجه / یه ربع کافیه!



(تجربی ۸۶)

۲۹۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \cdot \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

(تجربی ۹۲)

۲۹۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

(تجربی ۹۵)

۲۹۹. جواب کلی معادله  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  مثلثاتی، کدام است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۱)$$



(تجربی فارغ ۹۴ و تجربی فارغ ۹۸)

۳۰۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos^3 x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \checkmark \\ x = -\frac{\pi}{4} \text{ تابلو} \rightarrow \checkmark \end{cases}$$



۳۰۱. جواب کلی معادله  $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (تقریبی ۹۰)

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

ساده کردن

(تقریبی ۹۶)

۳۰۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )



$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

ساده کردن

(تقریبی ۹۴)

۳۰۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$  کدام است؟

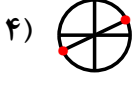
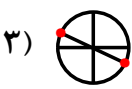
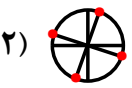
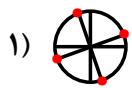
$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۱)$$

ساده کردن



$$\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos 2x} + \frac{2\sin x \cos x}{\sin 2x} = 0 \longrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{✗} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \longrightarrow \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{✓} \end{array} \right.$$



(تجربی ۸۳)

۳۰۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$  کدام است؟

- ۱)
- ۲)
- ۳)
- ۴)

(تجربی ۹۳)

۳۰۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

ساده کردن و دامنه

(نردباز ۴ فیلی سبز)

۳۰۶. تمام جواب‌های معادله  $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

دامنه





(رشته ریاضی) (ریاضی فارج ۹۹)

۳۰۷. جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$  کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳)$$

سخت

۳۰۸. جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  با شرط  $x \neq k\pi$  که در آن  $k$  یک عدد صحیح است،

(تجربی ۹۹)

کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

سخت

خطر!

(تجربی فارج ۹۷)

۳۰۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  ، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )



$$\frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (۱)$$

سخت

(تجربی ۹۷)

۳۱۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$  ، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )



$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۱)$$

روش ۱:

سخت

روش ۲:



۳۱۱. جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه مقادیر  $i$

(ریاضی ۸۳)

کدام است؟

{۱, ۵, ۹} (۴)

{۱, ۴, ۷} (۳)

{۱, ۳, ۵} (۲)

{۷, ۹} (۱)



## (II) بی k

(تعداد جوابها، مجموع جوابها، شکل جوابها روی دایره)

خلوت

شلوغ ضربی: چند خلوت!

شلوغ جمعی: } به کمک روابط: } ایجاد عامل مشترك و فاکتور ← شلوغ ضربی ← چند خلوت  
 ایجاد عدد ثابت صفر }  
 (گراز بین نرفت) } تغییر متغیر

(تلم پی ۱۴۰۰)

۳۱۲. مجموع جوابهای معادله  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$  که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، کدام است؟



۲π (۴)

$\frac{13\pi}{6}$  (۳)

π (۲)

$\frac{7\pi}{6}$  (۱)

خطرا!

(IQ کاج)

۳۱۳. معادله  $8 \sin^5 4x - 2\sqrt{3} = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

خطرا!

ترفندا!

\* مجموع جوابها؟



(نردبام ۴ فیلی سبز)

۳۱۴. تعداد جواب‌های معادله  $\sin(\pi \cos x) = -1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

خطرا!

(تجربی ۹۸)

۳۱۵. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $4\pi$  (۴)  $5\pi$

(تجربی قارج ۹۹)

۳۱۶. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



\* مجموع جواب‌ها؟

(IQ گاج)

۳۱۷. مجموع جواب‌های معادله  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $4\pi$





۳۱۸. معادله‌ی  $(\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{3})(\sin x - 9)(\sin x - 5)(\sin x - 1) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

خطرا!

خطرا!

(IQ کاج)

۳۱۹. معادله  $(2\sin^2 2x - 1)(2\sin^2 2x - 2) \dots (2\sin^2 2x - 5) = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  چند ریشه دارد؟

۱۱ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)





۳۲۰. نقاط پایانی کمان جوابهای معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  بر روی دایره مثلثاتی، رأسهای کدام چند

(ریاضی خارج ۹۱)

ضلعی است؟

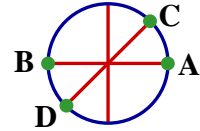
- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم الزاویه (۴) مثلث متساوی الساقین

$$\sin x \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \quad \text{خطرا!} \quad (\cos x \neq 1)$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 0 = \sin^2 x - \sin x \cos x \Rightarrow 0 = \underbrace{\sin x}_0 (\underbrace{\sin x - \cos x}_0)$$

$$\sin x = 0 \quad \sin x = \cos x$$



خطرا!

۳۲۱. تعداد جوابهای معادله  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  مثلثاتی در فاصله  $[0, 2\pi]$ ،

(تجربی ۱۴۰۰)

خطرا!

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

خطرا!



(تپیری فارچ ۹۶)

۲۲۲. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

 $5\pi$  (۴) $\frac{9\pi}{2}$  (۳) $4\pi$  (۲) $\frac{14\pi}{2}$  (۱)

۲۲۳. اگر اختلاف جواب‌های معادله  $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi+4x}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi+8x}{2}\right)} = 0$  در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر  $\alpha$  باشد، مقدار  $\tan(2\alpha)$  کدام است؟

(تپیری ۱۴۰۲)

 $-\sqrt{3}$  (۴) $\sqrt{3}$  (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

(IQ کاج)

۲۲۴. معادله  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

معروف

\*  $\sin x = \cos x$  ؟



۲۲۵. مجموع جواب‌های معادله‌ی  $\sin 2x (\sin x + \cos x) = \cos 2x (\cos x - \sin x)$  در بازه‌ی  $[0, \pi]$  کدام است؟ (تیرگی ۹۳)

$$\frac{7\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin 2x (\sin x + \cos x) = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} (\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x (\sin x + \cos x) = (\cos x - \sin x)^2 (\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow 0 = (\cos x - \sin x)^2 (\sin x + \cos x) - \sin 2x (\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow 0 = (\sin x + \cos x) \left( \underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{1 - \sin 2x} - \sin 2x \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{(\sin x + \cos x)}_0 \underbrace{(1 - 2\sin 2x)}_0$$

$$\sin x = -\cos x \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} & \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ \pi - \frac{\pi}{6} & \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$





(ریاضی فارغ ۹۸)

۳۲۶. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$4\pi$  (۴)

$\frac{7\pi}{2}$  (۳)

$3\pi$  (۲)

$\frac{5\pi}{2}$  (۱)

۳۲۷. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(ریاضی ۹۸)

$3\pi$  (۴)

$2\pi$  (۳)

$\frac{7\pi}{2}$  (۲)

$\frac{5\pi}{2}$  (۱)

معروف

\*  $\sin x + \cos x = -1$  ؟

(تقریبی دی ۱۴۰۱)

۳۲۷. کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب‌های معادله  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$  کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$  (۴)

$\frac{\pi}{2}$  (۳)

$\pi$  (۲)

$2\pi$  (۱)



(تجربی ۱۴۰۱)

۳۲۹. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی  $\lambda \cos x - \tan^2 x = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۳۳۰. اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادله  $\cot\left(\frac{\pi + 4x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi + \lambda x}{2}\right)$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  برابر  $\alpha$  باشد، مقدار

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

 $\cos(3\alpha)$  کدام است؟ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۳) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (۱)

(IQ کاج)

۳۳۱. مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1 + \cos 4x}{\lambda} = \frac{\cos^2 x}{1 + \cot^2 x}$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟ $3\pi$  (۴) $\frac{5\pi}{2}$  (۳) $\frac{3\pi}{2}$  (۲) $2\pi$  (۱)



۳۲۲. در معادله‌ی مثلثاتی  $2\cos^2 x + \cos x = 1$  نقاط پایانی جواب‌ها بر روی دایره، رئوس کدام شکل هستند؟

(ریاضی فارغ ۸۳)

- (۱) مثلث متساوی الاضلاع (۲) مثلث قائم الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

(کتاب درسی)

۳۲۳. مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی  $\cos x(2\cos x - 9) = 5$  در بازه‌ی  $[-\pi, 2\pi]$  کدام است؟



$\frac{8\pi}{3}$  (۴)

$\frac{4\pi}{3}$  (۳)

$\frac{5\pi}{3}$  (۲)

$\frac{2\pi}{3}$  (۱)

(ریاضی ۸۰)

۳۲۴. مجموع جواب‌های معادله‌ی  $2\sin^2 x - \cos x = 1$  در بازه‌ی  $[\pi, 2\pi]$  کدام است؟

$\frac{11\pi}{3}$  (۴)

$3\pi$  (۳)

$\frac{10\pi}{3}$  (۲)

$\frac{8\pi}{3}$  (۱)



(فصل ۱۰۰)

۳۲۵. مجموع جواب‌های معادله  $\cos 2x = 3\cos x - 2$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$4\pi$  (۴)

$\frac{8\pi}{3}$  (۳)

$\frac{4\pi}{3}$  (۲)

$2\pi$  (۱)





۳۳۶. طول کمان کوچک‌تر محصور بین ریشه‌های معادله‌ی  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟  
(مشابه نردبام ۳ فیلی سبز)

- (۱)  $\frac{\pi}{3}$       (۲)  $\frac{2\pi}{3}$       (۳)  $\frac{\pi}{2}$       (۴)  $-\pi$



۳۳۷. حاصل جمع ریشه‌های معادله  $2 \cos 2x - \sin^2 x = 2 \cos x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
(۱۰ کاج)



- (۱)  $3\pi$       (۲)  $5\pi$       (۳)  $2\pi$       (۴)  $4\pi$

۳۳۸. انتهای کمان ریشه‌های معادله‌ی مثلثاتی  $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$  بر روی دایره‌ی مثلثاتی شکلی را ایجاد کرده است. شکل حاصل کدام است؟  
(مهر و ماه)

- (۱) مثلث متساوی الاضلاع      (۲) مثلث نامشخص  
(۳) شش ضلعی منتظم      (۴) شش ضلعی نامنتظم

خطر!



۳۳۹. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $5 = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8})$  در بازه‌ی  $[0, 4\pi]$  کدام است؟

(مشابه ریاضی فارغ ۹۵)

$$\frac{13\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{13\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{8} \quad (۱)$$

معروف

ترفند

(ریاضی فارغ ۱۴۰۱)

۳۴۰. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $1 = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

(تجربی فارغ ۱۴۰۱)

۳۴۱. تعداد جواب‌های معادله  $1 = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$





۳۴۲. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$



۳۴۳. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $2\sin(x)\cos(2x) + \sin(x) = 1$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

کدام است؟

$$\frac{7\pi}{2} \quad (۴)$$

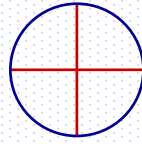
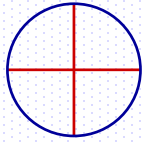
$$3\pi \quad (۳)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۲)$$

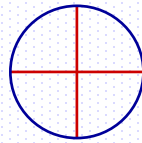
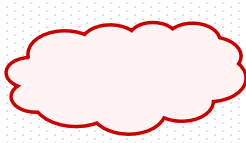
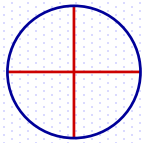
$$2\pi \quad (۱)$$



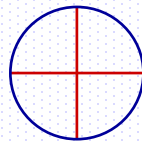
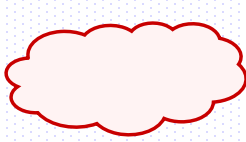
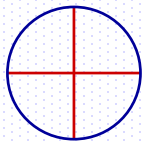
$$\sin \bigcirc = \sin \square$$



$$\cos \bigcirc = \cos \square$$



$$\tan \bigcirc = \tan \square$$



$$\cot \bigcirc = \cot \square \rightarrow \tan \bigcirc = \tan \square$$

(کتاب درسی)

۳۴۴. معادله  $\sin 2x = \sin 3x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  چند ریشه دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

ترفند



۳۴۵. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟ (تجربی تاراج ۹۲)

۱)  $\pi$  (۴)۲)  $0$  (۳)۳)  $9\pi$  (۲)۴)  $8\pi$  (۱)

ترفند



\* اگر  $\cos 5x = -\cos 4x$  چی؟

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

۳۴۶. تعداد جواب‌های معادله  $2 \sin x \cos x = 2 \cos^2(3x) - 1$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

۱) ۸ (۴)

۲) ۶ (۳)

۳) ۵ (۲)

۴) ۴ (۱)

(ریاضی مبداء ۱۴۰۱)

۳۴۷. معادله  $\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x$  در بازه  $[-\pi, \pi]$ ، چند جواب دارد؟

۱) ۸ (۴)

۲) ۶ (۳)

۳) ۴ (۲)

۴) ۳ (۱)





(ریاضی ۹۹)

۳۴۸. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی  $\tan(3x)\tan(x) = 1$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$\frac{11\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{9\pi}{2} \quad (۳)$$

$$6\pi \quad (۲)$$

$$5\pi \quad (۱)$$

روش ۱:

روش ۲:

$$\tan(\bigcirc) \times \tan(\square) = \pm 1 : \text{VIP}$$

\* به روش ۲ تست ۳۱۰ مراجعه کنید.

(سنجش ۱۴۰۱)

۳۴۹. مجموع تمام جواب‌های معادله  $\tan 3x \cdot \tan 7x + 1 = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

$$\pi \quad (۴)$$

$$4\pi \quad (۳)$$

$$3\pi \quad (۲)$$

$$2\pi \quad (۱)$$



(تقریبی مهرداد ۱۴۰۱)

۳۵۰. معادله مثلثاتی  $\tan 2x = \cot x$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

$$7 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$5 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$



۳۵۱. فرض کنید  $A$  مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در

(ریاضی ۱۴۰۰)

بازه  $[0, \pi]$  باشد، ماکزیمم عضو مجموعه  $A$ ، کدام است؟

$$\frac{8}{9}\pi \text{ (۴)}$$

$$\frac{7}{9}\pi \text{ (۳)}$$

$$\frac{6}{7}\pi \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{7}\pi \text{ (۱)}$$

روش ۱:

روش ۲:

ترفند مشاهده چند کسینوس ضربی:

(به شرط  $\sin \neq 0$ )



۳۵۲. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$  در فاصله  $[0, 2\pi]$

(ریاضی قارچ ۱۴۰۰)

کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۷ (۱)

